第 14 章　総合的に考えよう

ＶＡＲモデル

　ＶＡＲ（ベクトル自己回帰）モデルとは、モデル内の変数の自己ラグを含んで推計するモデルである。ＡＲ（自己回帰）モデルは自分自身のラグのみを含んで推計するのに対し、ほかの変数のラグも含んで推計している。

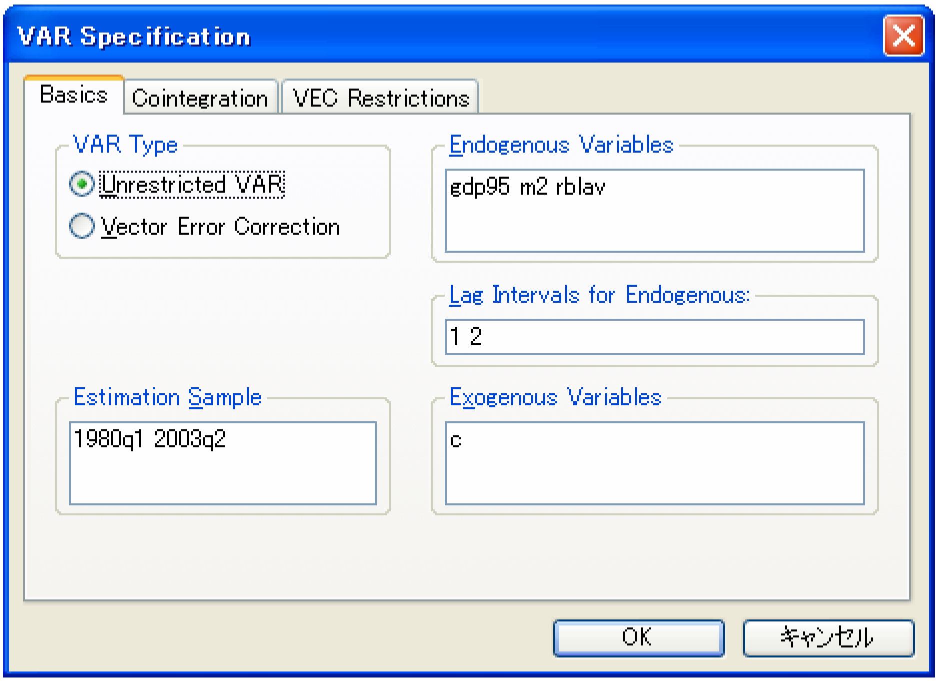
$$y_t = a_{10} + a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + e_{yt}$$

$$z_t = a_{20} + a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + e_{zt}$$

　考え方としては、多数の変数を含むモデルの誘導形であると考えることができる。構造形の場合は、モデル内の当期の変数を含んで推計するが、ＶＡＲモデルの場合は、先決内生変数のみによって推計される。このため、同時方程式バイアスの問題が生じず、通常の最小二乗法で推計できる。

ＶＡＲモデルの推計

　ＶＡＲモデルを推計するには、推計に使う変数を選んで（Ctrl キーを押しながら、変数を左クリックする）、右クリックする。[OPEN]→[as VAR]を選ぶ。



VAR Type

　ＶＡＲの種類を選ぶ。通常は、Unrestricted VAR を選ぶ。エラーコレクション項の付いたＶＡＲモデル（後述）を作成するときは、Vector Error Correction を選ぶ。

Endogenout Variables

ＶＡＲモデルに盛り込む変数を入力する。変数を選んで開いた場合はすでに変数名が入力されているが、ここで変更すうることもできる。

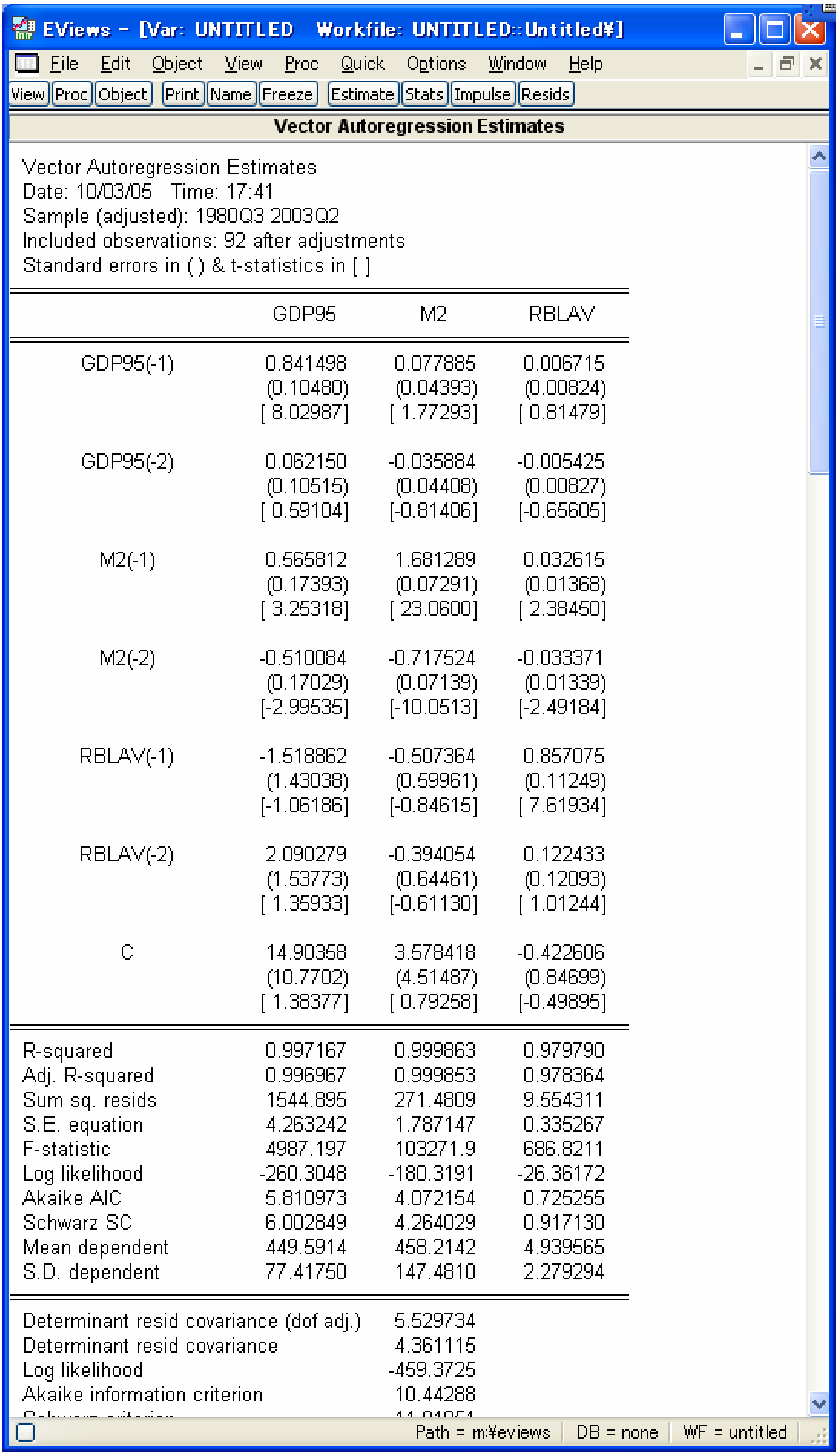
Lag Intervals for Endogenous

　ラグ数を決める。最小ラグ数と最大ラグ数を入力するようになっている。ラグ数が 1 のときは、１　１と入力する。

Exogenous Variables

　外生変数を入力する。通常は「Ｃ（定数項)」が入っているが、消費税ダミー、オイルショックダミーなどダミー変数を加えたり、あらかじめ外生変数だと考えられる変数（原油価格など）があればここに入力する。

ＯＫを押すと、ＶＡＲモデルの推計結果が出力される。



Vector Autoregression Estimates
Date: 10/03/05 Time: 17:41
Sample (adjusted): 1980Q3 2003Q2
Included observations: 92 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	GDP95	M2	RBLAV
GDP95(-1)	0.841498	0.077885	0.006715
	(0.10480)	(0.04393)	(0.00824)
	[8.02987]	[1.77293]	[0.81479]
GDP95(-2)	0.062150	-0.035884	-0.005425
	(0.10515)	(0.04408)	(0.00827)
	[0.59104]	[-0.81406]	[-0.65605]
M2(-1)	0.565812	1.681289	0.032615
	(0.17393)	(0.07291)	(0.01368)
	[3.25318]	[23.0600]	[2.38450]
M2(-2)	-0.510084	-0.717524	-0.033371
	(0.17029)	(0.07139)	(0.01339)
	[-2.99535]	[-10.0513]	[-2.49184]
RBLAV(-1)	-1.518862	-0.507364	0.857075
	(1.43038)	(0.59961)	(0.11249)
	[-1.06186]	[-0.84615]	[7.61934]
RBLAV(-2)	2.090279	-0.394054	0.122433
	(1.53773)	(0.64461)	(0.12093)
	[1.35933]	[-0.61130]	[1.01244]
C	14.90358	3.578418	-0.422606
	(10.7702)	(4.51487)	(0.84699)
	[1.38377]	[0.79258]	[-0.49895]
R-squared	0.997167	0.999863	0.979790
Adj. R-squared	0.996967	0.999853	0.978364
Sum sq. resids	1544.895	271.4809	9.554311
S.E. equation	4.263242	1.787147	0.335267
F-statistic	4987.197	103271.9	686.8211
Log likelihood	-260.3048	-180.3191	-26.36172
Akaike AIC	5.810973	4.072154	0.725255
Schwarz SC	6.002849	4.264029	0.917130
Mean dependent	449.5914	458.2142	4.939565
S.D. dependent	77.41750	147.4810	2.279294

Determinant resid covariance (dof adj.)	5.529734
Determinant resid covariance	4.361115
Log likelihood	-459.3725
Akaike information criterion	10.44288

縦一列が、一本の推計式となっており、変数の数分の推計式がならぶ。もっとも左の列は次のような式を表している。最下段に定数項が表示されている。　()内は標準誤差、[]内はt値である。

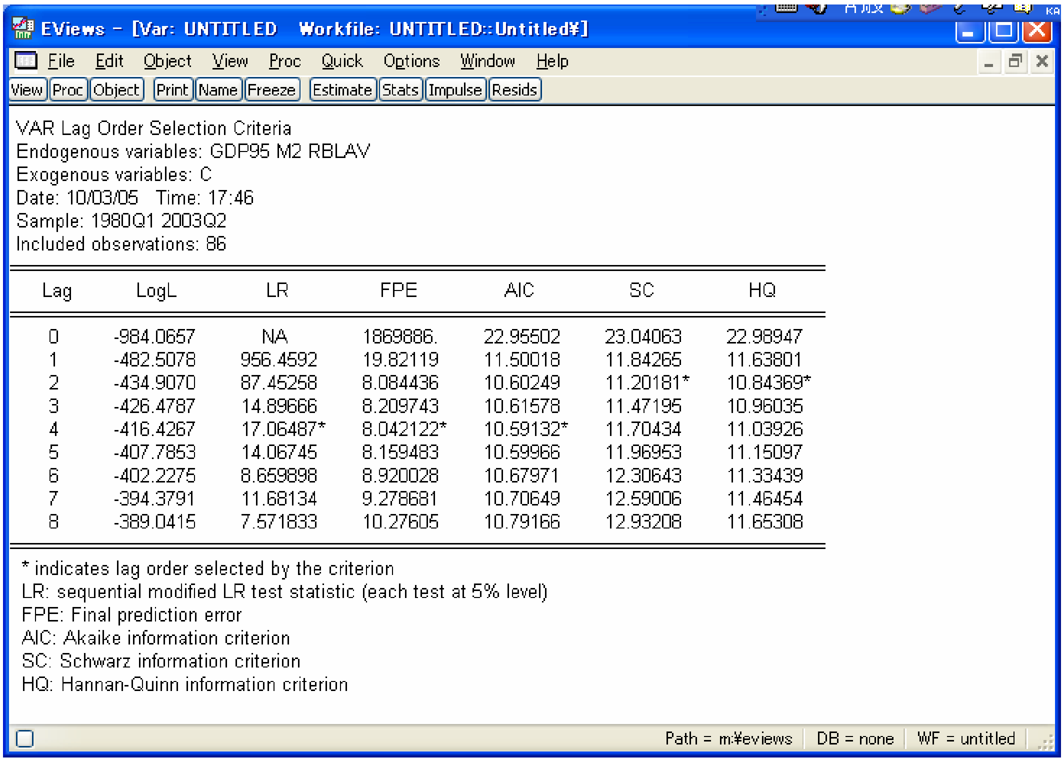
$$GDP95 = 14.90358 + 0.841498 GDP95(-1) + 0.062150 GDP95(-2) + 0.565812 M2(-1) \ldots$$

ラグ数の決め方

VAR モデルを推計するには、説明変数を決め、ラグ数を決める必要がある。EViews では標準的にラグ数２が入っているが、変更可能である。「なるべく当てはまりの良いものを選ぶ」という原則を使うとすれば、当てはまりを表す指標の中でもっとも良いものを選べばよい。ラグを決めるための表が出力できる。

[View]→[Lag Structure]→[Lag Length Criteria…]

最適ラグ数を選ぶための最大ラグ数を聞いてくる（Lags to include）ので、入力する。あらかじめ８が入力されている。あまり長いラグ数をとるのは好ましくないので、たいていの場合はこのままでよい。ラグ選択のための推計はすべて同じ推計期間で行われる（最もラグの長い期で推計できる期間で固定される）。短いラグでの推計では推計初期がもっと長くとれたものが推計できるため、ここで出力された結果と実際に推計した時のＡＩＣは一致しない。



VAR Lag Order Selection Criteria
Endogenous variables: GDP95 M2 RBLAV
Exogenous variables: C
Date: 10/03/05 Time: 17:46
Sample: 1980Q1 2003Q2
Included observations: 86

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-984.0657	NA	1869886.	22.95502	23.04063	22.98947
1	-482.5078	956.4592	19.82119	11.50018	11.84265	11.63801
2	-434.9070	87.45258	8.084436	10.60249	11.20181*	10.84369*
3	-426.4787	14.89666	8.209743	10.61578	11.47195	10.96035
4	-416.4267	17.06487*	8.042122*	10.59132*	11.70434	11.03926
5	-407.7853	14.06745	8.159483	10.59966	11.96953	11.15097
6	-402.2275	8.659898	8.920028	10.67971	12.30643	11.33439
7	-394.3791	11.68134	9.278681	10.70649	12.59006	11.46454
8	-389.0415	7.571833	10.27605	10.79166	12.93208	11.65308

* indicates lag order selected by the criterion
LR: sequential modified LR test statistic (each test at 5% level)
FPE: Final prediction error
AIC: Akaike information criterion
SC: Schwarz information criterion
HQ: Hannan-Quinn information criterion

各指標で推計式の当てはまりが最もよいラグ数のところに＊がつけられるので、それを参考にしてラグ数を決める。ＡＩＣかＳＣで決めるのが一般的だ。

グレンジャーの因果関係

ＶＡＲモデルの変数を選ぶ際には、グレンジャーの因果関係があるかどうかを見て、因果関係のあるものを変数に選ぶ。

次のようなモデルの場合、z_{t-1}の係数a_{12}が有意にゼロでなければ、ｚからｙにグレンジャーに意味での因果関係があると呼ぶ。

$$y_t = a_{10} - a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + e_{yt}$$
$$z_t = a_{20} - a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + e_{zt}$$

グレンジャーの因果関係を調べるには、「$a_{12}=0$」という帰無仮説を検定すればよい。a_{12}をゼロに制約した推計と無制約のものとについて、F 検定を行う。

$$F = \frac{(\text{制約付き推計の残差二乗和—通常の推計の残差二乗和）／（制約の数）}}{\text{通常の推計の残差二乗和／（サンプル数ー係数の数）}}$$

もっとも簡単に、グレンジャーの因果関係を調べる場合は、次のような手順を踏む。これは、ペアの因果関係を調べているに過ぎず、実際のモデルが３変数以上含まれることがわかっている場合は、ＶＡＲモデルを使って調べる方がよい。

３変数以上の場合

３変数以上で相互に関係があると想定される場合は、ＶＡＲモデルを作成し、通常通りに推計した式と、グレンジャーの因果関係がないと仮定した式（因果関係がない変数の係数がゼロという制約を置く）との違いを検定する。帰無仮説を「グレンジャーの因果関係がない」として、その仮定のもとで計算される検定統計量が、よく起こりうるものか、めったに起こりえないものかの確率をみて、仮説を棄却するかどうかを判断する。

検定統計量にはワルド統計量（W）を使う。係数制約にはＦ検定を使ってもよいが、ワルド統計量をつかっても同様の検定ができる。

ワルド統計量とＦ値（Ｆ）の間には、制約の個数を ｑ として次の関係がある。Wは自由度 q のカイ二乗分布をするため、Wを使って検定する。

W＝q×Ｆ

ＶＡＲモデルによるグレンジャーの因果関係は、ＶＡＲモデルを推計した画面で確認す

ることができる。
　たとえば、実質国内総生産（gdp95)、マネーサプライ（M)、長期金利（rblav）の3変数でＶＡＲモデルを作成してグレンジャーの因果関係を調べてみよう。ラグ数は簡単な例を示すため１とした。
　ＧＤＰに関してＶＡＲモデルを作ると次式となる。

$$gdp95 = c_1 + a_1 \times gdp95(-1) + a_2 \times m(-1) + a_3 \times rblav(-1) + e_1 \quad （１）$$

　マネーサプライがＧＤＰ95にグレンジャーの因果関係がない場合は次式である。

$$gdp95 = c_1 + d_1 \times gdp95(-1) + d_3 \times rblav(-1) + e_3 \quad （２）$$

　長期金利がＧＤＰ95にグレンジャーの因果関係がない場合は次式である。

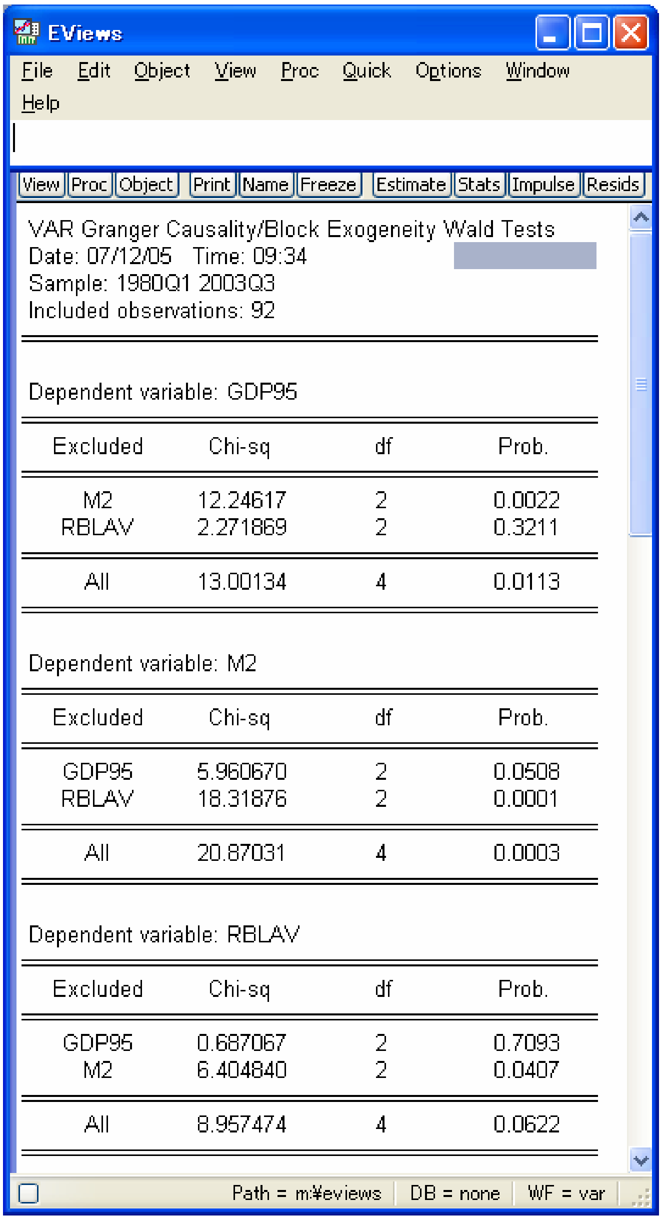
$$gdp95 = c_1 + b_1 \times gdp95(-1) + b_2 \times m(-1) + e_2 \quad （３）$$

　マネーサプライから実質ＧＤＰへのグレンジャーの因果関係を調べるには、（１）式の推計で得られた残差二乗和と（２）式で得られた残差二乗和を使って検定統計量を計算する。
　同様に、長期金利から実質ＧＤＰへのグレンジャーの因果関係を調べるには、（１）式の推計で得られた残差二乗和と（３）式で得られた残差二乗和を使って検定統計量を計算する。
　さらに、長期金利とマネーサプライの両方が GDP95 にグレンジャーの因果関係がない場合は次式である。

$$gdp95 = c_1 + f_1 \times gdp95(-1) + e_4 \quad （４）$$

　両変数とも影響がないかどうかを調べるには、（１）式の残差二乗和と（４）式の残差二乗和を使って検定統計量を計算する。
　もし、マネーサプライも長期金利も実質ＧＤＰに影響を与えていなければ、実質ＧＤＰはこのモデルないではほかの変数から影響を受けない外生変数として扱うことができる。

Eviewsでの操作
　ＶＡＲモデルのオブジェクト画面で、
[Lag Structure]→[Granger Causality/Block Exogeneity Tests]



VAR Granger Causality/Block Exogeneity Wald Tests
Date: 07/12/05 Time: 09:34
Sample: 1980Q1 2003Q3
Included observations: 92

Dependent variable: GDP95

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
M2	12.24617	2	0.0022
RBLAV	2.271869	2	0.3211
All	13.00134	4	0.0113

Dependent variable: M2

Excluded	Chi-sq	df	Prob.
GDP95	5.960670	2	0.0508
RBLAV	18.31876	2	0.0001
All	20.87031	4	0.0003

Dependent variable: RBLAV

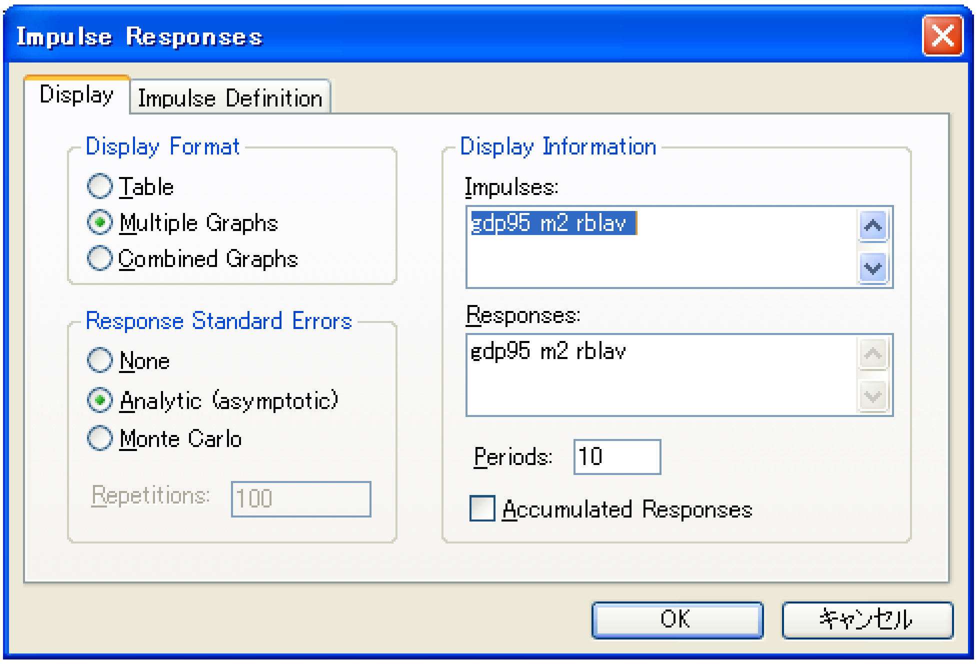
Excluded	Chi-sq	df	Prob.
GDP95	0.687067	2	0.7093
M2	6.404840	2	0.0407
All	8.957474	4	0.0622

3 種類の変数によって計算されており、一番上が説明変数が gdp95 の場合である。上段はＧＤＰ95 への因果関係をみており、Ｍ２を説明変数から除いた場合（Ｍ２からの因果関係があるかどうかを検定している）、長期金利を説明変数から除いた場合、両者を除いた場合である。

この結果からは、「マネーサプライから実質ＧＤＰへのグレンジャーの因果関係がない」という帰無仮説は、１％水準で棄却される（確率が 0.22%）。一方、「長期金利から実質ＧＤＰへのグレンジャーの因果関係がない」とう帰無仮説は 10%水準でも許容される（確率が 32.11%）。「マネーサプライと長期金利の両方が実質ＧＤＰに因果関係がない」という帰無仮説は１％水準では棄却できないが、5%水準では棄却できる（確率が 1.13%）。

インパルス反応関数

ＶＡＲモデルを使った分析で重要なのが、インパルス反応関数だ。ＶＡＲモデルのオブジェクトの[impulse]を選ぶと次のメニューになる。



Display Format

結果の表示形態を選ぶ。数値として使う場合は Table を選ぶ。結果をすべて別のグラフに表す場合は、Mutiple Graphs を選び、ある変数のショックでほかの変数がどのように動くかを一つのグラフで見る場合には Combined Graphs を選ぶ。

Responese Standard Errors

結果がどのくらいの標準誤差を持っているかを知りたいときに表示する。通常 Analtic で問題ない。標準誤差を考慮しても、反応関数がプラスであれば、その結果は有意にプラスであると統計的に言えることになる。インパルス反応関数がプラスであっても、誤差の範囲にゼロがふくまれていれば、厳密にはプラスであるという判断はできない。

Display Information

Impulses

ショックを与える側の変数を入力する。

Responses

ショックの結果変化する側の変数を入力する。

Periods

ショックから何期分出力するかを決める。
Accumulated Responses
出力結果を累積させる時に使う。被説明変数がある変数の階差の場合、その結果も階差で表示される。もとの変数（たとえば、被説明変数が⊿（x）の時の x）がどう動くかを知りたいときはここをチェックする。

ショックをどのようにして与えるか
ＶＡＲモデルの基本的な構造は以下の式で示される。

$$y_t = a_{10} - a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + e_{yt}$$
$$z_t = a_{20} - a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + e_{zt}$$

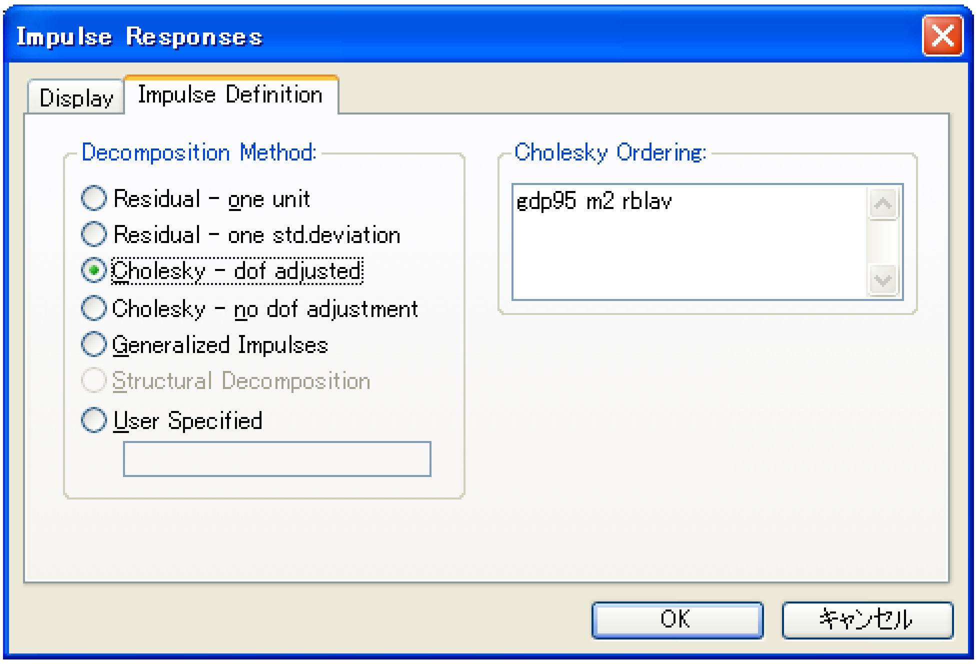
インパルス反応関数は、式の誤差項にショックを与えて y_t や z_t の動きがどうなるかをみるものである。しかし、e_{yt} は e_{zt} は誘導形で導かれる誤差項であって、両者が相関していない保証はない。むしろ相関している場合の方が多いだろう。

そこで、互いに相関していない誤差項である u_{yt} や u_{zt} で e_{yt} や e_{zt} を表そうとしたのがコレスキー分解である。

コレスキー分解では変数の順序が重要になる。２変数の場合、a を定数として誤差項をつ次のように分解してショックを与える。ショックを与えた期に、ｙの誤差はｙ、ｚの両方に影響を与えるが、ｚの誤差はｚにしか影響を与えない。順番の違いで当期に与える影響が変わる。

$$e_{yt} = u_{yt}$$
$$e_{zt} = a u_{yt} + u_{zt}$$

ショックをどのように与えるのかを決めるのは、Impulse Reonse の Impulse Definitoi のタグである。



Decomposition Method

Residual-one unit

残差の相関を考えない場合で、１単位のショックを与える場合。

Residual-one std.deviation

残差の相関を考えない場合で、１標準偏差の影響を与える場合。

Cholesky-dof adjusted

自由度修正済みコレスキー分解。誤差の共分散を計算する際、$\sum(e_1e_2)/(T-p)$とする。ただし、T はサンプル数、p は説明変数の数である。

Cholesky-no dof adjustment

コレスキー分解。誤差の共分散を計算する際、$\sum(e_1e_2)/T$ とする。ただし、T は説明変数の数。

Generalized Impulses

Pesaran and Ahin(1998)参照。変数の順番によって、結果が変わらない分解ができる。

Structural Decomposition

構造ＶＡＲ（後述）で使用。

User Specified

行列を作って、影響の与え方を決める。

Cholesky Ordering

コレスキー分解をする変数の順序を決める。順序が早いほどほかの変数に影響を与えることになる。

公共投資の効果

ＶＡＲモデルを使って、公共投資の効果を調べてみよう。使う変数は、実質公的固定資本形成（IPUB90)、対ドル円レート（FREXDA)、実質輸出（ E90)、実質民間需要（GDD90)、実質金利（RLR)、民間需要デフレーター（PGDD90）の 6 変数で、実質金利以外は対数階差をとった。サンプル期間は 1970 年 7―9 月期から 1998 年 4-6 月期までである。80 年代までの推計（1970 年７－９月期から 1989 年 10―12 月期と、90 年代までを含むデータで違いをみた。

ＶＡＲモデルを作り、最適ラグ数を調べるとラグが 1 となった。ＶＡＲモデル推計後、インパルス反応関数を計算する。ここでは、実質公共投資が 1 単位増えた時どの程度実質民間需要が増えるかを調べた。誤差項に同時相関が考えられるため、コレスキー分解を使う。コレスキー分解では誤差項 1 標準偏差あたり、どの程度増えるかが計算される。これを１単位当たりに直すには、公共投資の誤差項の１標準偏差で割ればよい。

データは階差で推計されているので、結果は累積させてみる方がよいだろう。エクセルに移すことを考えると、テーブルで出力した方がよい。

これらを総合して、インパルス反応関数のオプションは次のように選ぶ。

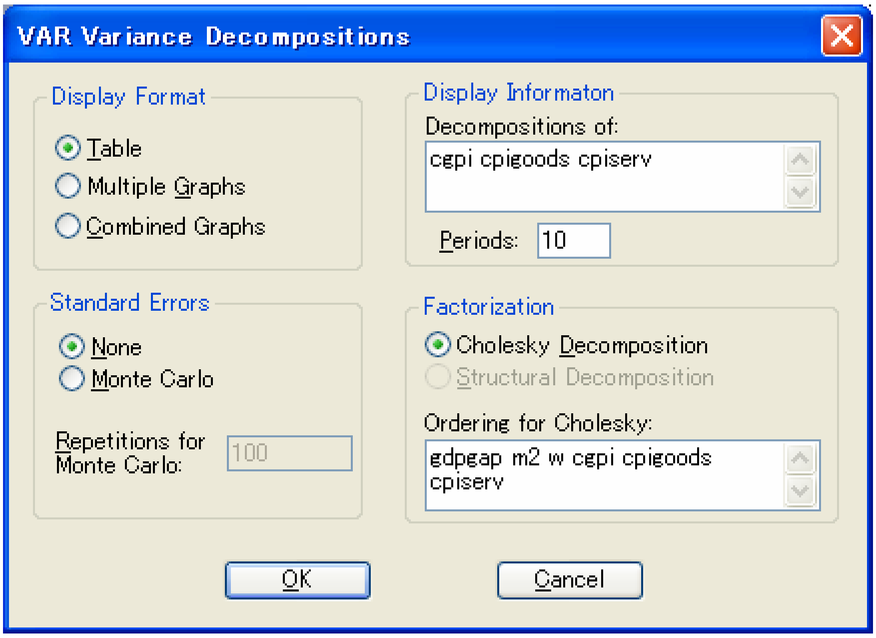
Display

Display Format	Table
Responese Standard Errors	None
Display Information	
Impulses	ipub90
Responses	ipub90 gdd95
Periods	24
Accumulated Responses	チェックする

Impulse Definition

Decomposition Method	Cholesky-dof adjusted
Cholesky Ordering	ipub90 frexda e90 gdd90 rlr pgdd90

分散分解
　分散分解は、ある変数が、ほかの変数からどの程度影響しているかを百分率で表したものである。
　分散分解は、ＶＡＲオブジェクトで、
[View]→[Variance Decomposition...]を選択する。



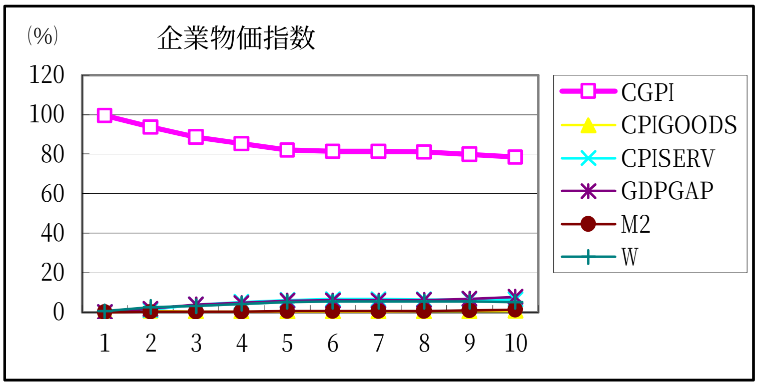
Display Format
　結果をどのように出力するかを選ぶ。Table は表、Multiple Graphs は個別のグラフ、Combined Graphs は変数ごとに一つにまとめたグラフを出力する。
Standard Errors
　None は推計の標準誤差を表示せず、Monte Carlo はモンテカルロ法によって、標準誤差を計算する。
Display Information
　　　　Decompposituions of
　　　　分解する変数名を入力する。標準的にはすべての変数が入力されている。
　　　　Period
　　　　どの程度さかのぼったところまで結果を出すかを決める。
Factorization
　　　　Cholesky Decomposition
　　　　コレスキー分解。
　　　　Structural Decompsition
　　　　構造ＶＡＲ（後述）で使用。

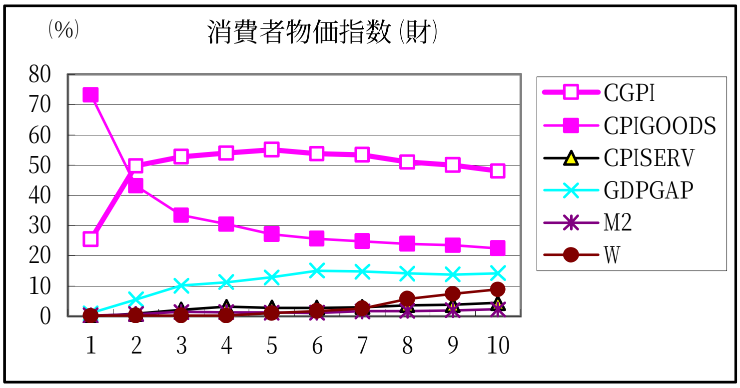
Ordering for Cholesky
コレスキー分解する際の変数の順番を入力する。

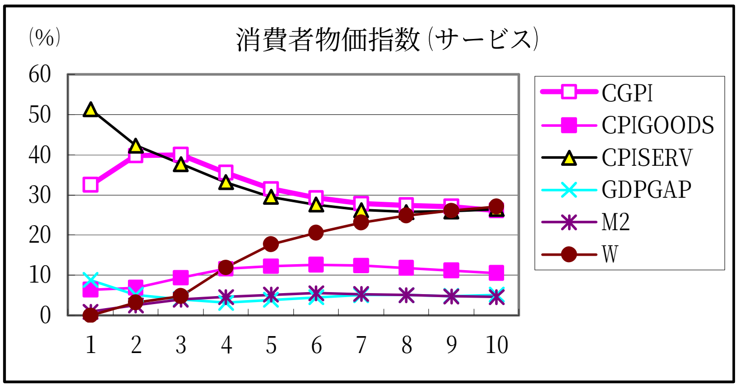
物価は何に影響されるか（「日本経済－変わったこと、変わらないこと」より）

物価が何によって影響されるかを調べるため、マネーサプライ（M2)、名目賃金（W)、ＧＤＰギャップ（GDPGAP)、企業物価指数（CGPI)、消費者物価指数（財）CPIGOODS、消費者物価指数（サービス）CPISERV の 6 変数でＶＡＲモデルを作った。

推計期間は 1980 年１－３月期から 2004 年４－６月期まで。ＶＡＲモデルのラグはＡＩＣにより 4 期が選択された。コレスキー分解の順番は、GDPGAP、M2、W、CGPI、CPIGOODS、CPISERV とした。


(%)
企業物価指数
120
100
80
60
40
20
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
CGPI
CPIGOODS
CPISERV
GDPGAP
M2
W


(%)
消費者物価指数（財）
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
CGPI
CPIGOODS
CPISERV
GDPGAP
M2
W


(%)
消費者物価指数（サービス）
60
50
40
30
20
10
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
CGPI
CPIGOODS
CPISERV
GDPGAP
M2
W

構造ＶＡＲ

　ＶＡＲモデルは構造方程式を誘導形にして推計したものだと考えることができる。構造ＶＡＲは、推計したＶＡＲモデルを構造形の形に復元しようとするものだ。
　構造形とは、同時決定するほかの変数が説明変数に含まれたもので、誘導形とは構造方程式を解いて説明変数は過去のラグで表される。

構造形

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + u_{yt}$$
$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + u_{zt}$$

ＶＡＲモデル（誘導形）

$$y_t = a_{10} - a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + e_{yt}$$
$$z_t = a_{20} - a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + e_{zt}$$

　構造形の誤差は互いに無相関であり、この誤差を使って、インパルスレスポンス関数を作れば、より現実的な推計となる。
　これらを行列で表すと次のように表現できる。

＜構造形（Ａの対角要素は１）＞

$$A\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = P_0 + P_1\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix}$$

＜誘導形＞

$$\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = A^{-1}P_0 + A^{-1}P_1\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix} = \hat{A}_0 + \hat{A}_1\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{pmatrix}$$

構造形のかく乱項と誘導形の誤差の関係

$$\begin{pmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix}$$

u^*_{yt} を１としたときの、構造形のかく乱項と誘導形の誤差の関係（EViews での関係式）

$$A\begin{pmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} u^*{}_{yt} \\ u^*{}_{zt} \end{pmatrix}$$

EViews では次の式の行列Ａ，Ｂに制約をかけることによって、構造形を導く。

Ａe=Bu

制約の数

説明変数の数を k とすると、k(3k-a)/2 だけの制約が必要となる。Ａ、Ｂどちらかを単位行列にすれば制約の数はかなり減り、(k2-k)/2 となる。

説明変数の数	制約の数	Ａ，Ｂいずれかが単位行列の場合
2	5	1
3	12	3
4	22	6
5	35	10
6	51	15

制約のかけかた

制約（関係式）の導き方には大きく分けて短期的な制約と長期的な制約の 2 種類がある。短期的な制約では、行列のＡかＢのどちらかに制約を置く。短期的な制約は次の 2 種類が考えられる。

（１）残差の関係に制約をかける（短期的制約）

推計された残差がどのような構造的な誤差からできているかという関係式を作る場合は、A を単位行列とし、B に制約をかける。

Ａe=Bu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} na & 0 \\ na & na \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{pmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^*{}_{yt} \\ u^*{}_{zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 u^*{}_{yt} \\ b_2 u^*{}_{yt} + b3u^*{}_{zt} + \end{pmatrix}$$

（２）係数の関係に制約をかける（短期的制約）

構造形は次の形をしている。行列Ａは、直接構造方程式の係数を表している。

$$A\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = P_0 + P_1\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = P_0 + P_1\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{pmatrix}$$

$$y_t = -a_1 z_t + \cdots$$
$$z_t = -a_2 y_t + \cdots$$

行列Ａの a_1=0 とする制約をおくということは、y_t の式の z_t の係数がゼロであるという制約をおくことと同じである。

（３）長期的制約

長期的な制約とは、ＶＡＲモデルをVMA形式で表し、あるかく乱項の係数の和がゼロであるという制約をかける場合である。

次のようなVMA形式の場合、「z_t の誤差が y_t に長期的に影響を与えない」ということを「$d_{11}+d_{12}+d_{13}+\cdots$」の和がゼロと考える。

$$y_t = c_{10} + c_{11}u_{yt} + c_{12}u_{yt-1} + c_{13}u_{yt-2}\cdots + d_{11}u_{zt} + d_{12}u_{zt-1} + d_{13}u_{zt-2}\cdots$$
$$z_t = c_{20} + c_{21}u_{yt} + c_{22}u_{yt-1} + c_{23}u_{yt-2}\cdots + d_{21}u_{zt} + d_{22}u_{zt-1} + d_{23}u_{zt-2}\cdots$$

計算の仕組みは次の通りである。

＜ＶＡＲ形式＞（簡単化のため定数項を除く）

$$\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \hat{A}_1\begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{pmatrix}$$

VMA形式への変換

$$\begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{pmatrix} + \hat{A}_1\begin{pmatrix} e_{yt-1} \\ e_{zt-1} \end{pmatrix} + \hat{A}_1^{\,2}\begin{pmatrix} e_{yt-2} \\ e_{zt-2} \end{pmatrix} + \hat{A}_1^{\,3}\begin{pmatrix} e_{yt-3} \\ e_{zt-3} \end{pmatrix} + \cdots$$

誤差項の各係数の和を示す行列（等比級数の和と同様の考え方）

$$I+\hat{A}_1+\hat{A}_1{}^2+\hat{A}_1{}^3+\cdots=(I-\hat{A}_1)^{-1}$$

構造形のかく乱項の各期の和を示す行列（＝C）

$$(I-\hat{A}_1)^{-1}\begin{pmatrix} e_{yt} \\ e_{zt} \end{pmatrix}=(I-\hat{A}_1)^{-1}A^{-1}B\begin{pmatrix} u^*{}_{yt} \\ u^*{}_{zt} \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} u^*{}_{yt} \\ u^*{}_{zt} \end{pmatrix}$$

(注)等比級数の和　$1+a+a^2+\cdots=\dfrac{1}{1-a}$

　Ｃについて、制約をおく。

ＥViews のＳＶＡＲの推計

　基本としたＶＡＲモデルは、失業率と実質ＧＤＰ（対数階差の 100 倍）とした。ラグ数は 2 期である。

　EViews では、VAR モデルのオブジェクトで、次のメニューを選ぶ。

[proc]→[Estimate Stractual Factorization]

　制約をするには、行列による方法と、式を書き込む方法がある。

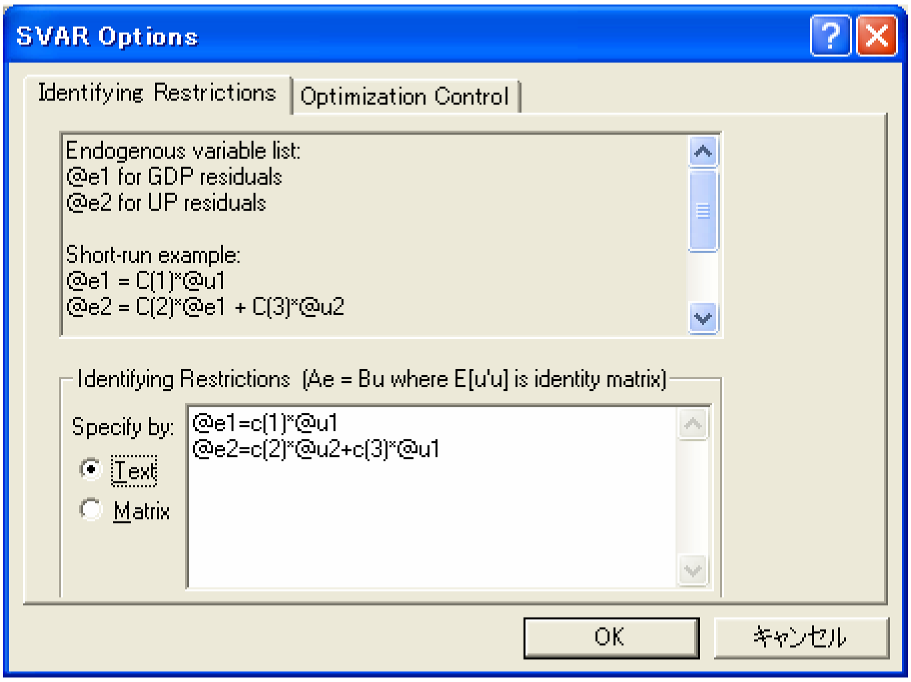
式による制約

　コレスキー分解も、残差と誤差の関係に制約をつけたものと解釈できる。

説明変数が２つの場合は、１つ目の変数の u は、e に等しく、２つ目の変数の u は、２つ目の変数の e と２つ目の変数の加重和になっているとする。

　Eviews での u は１に基準化されているので、c(1),c(2)は１ではなく、誤差の大きさに応じた値が入る。

```
@e1=c(1)@u1
@e2=c(2)@u2+c(3)*@u1
```


SVAR Options
Identifying Restrictions
Optimization Control
Endogenous variable list:
@e1 for GDP residuals
@e2 for UP residuals
Short-run example:
@e1 = C(1)*@u1
@e2 = C(2)*@e1 + C(3)*@u2
Identifying Restrictions (Ae = Bu where E[u'u] is identity matrix)
Specify by:
Text
Matrix
@e1=c(1)*@u1
@e2=c(2)*@u2+c(3)*@u1
OK
キャンセル

行列による制約

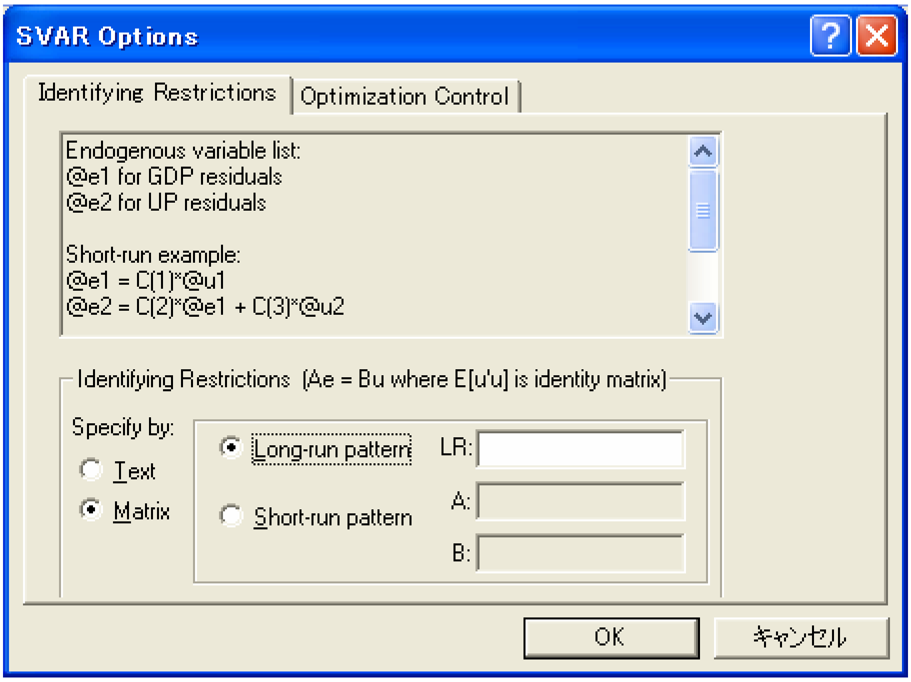
行列の形で制約をおくこともできる。コレキスキー分解の場合は、Ａは単位行列、Ｂは下三角行列となる。パラメーターを推計すべき場所は na と入力する。

Ae=Bu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} na & 0 \\ na & na \end{pmatrix}$$

```
matrix(2,2) mata
matrix(2,2) matb
mata.fill 1,0,0,1
matb=mata
matb(1,1)=na
matb(2,1)=na
matb(2,2)=na
```

行列を作成したら、short-run pattern の A と B にそれぞれの行列名を入力する。

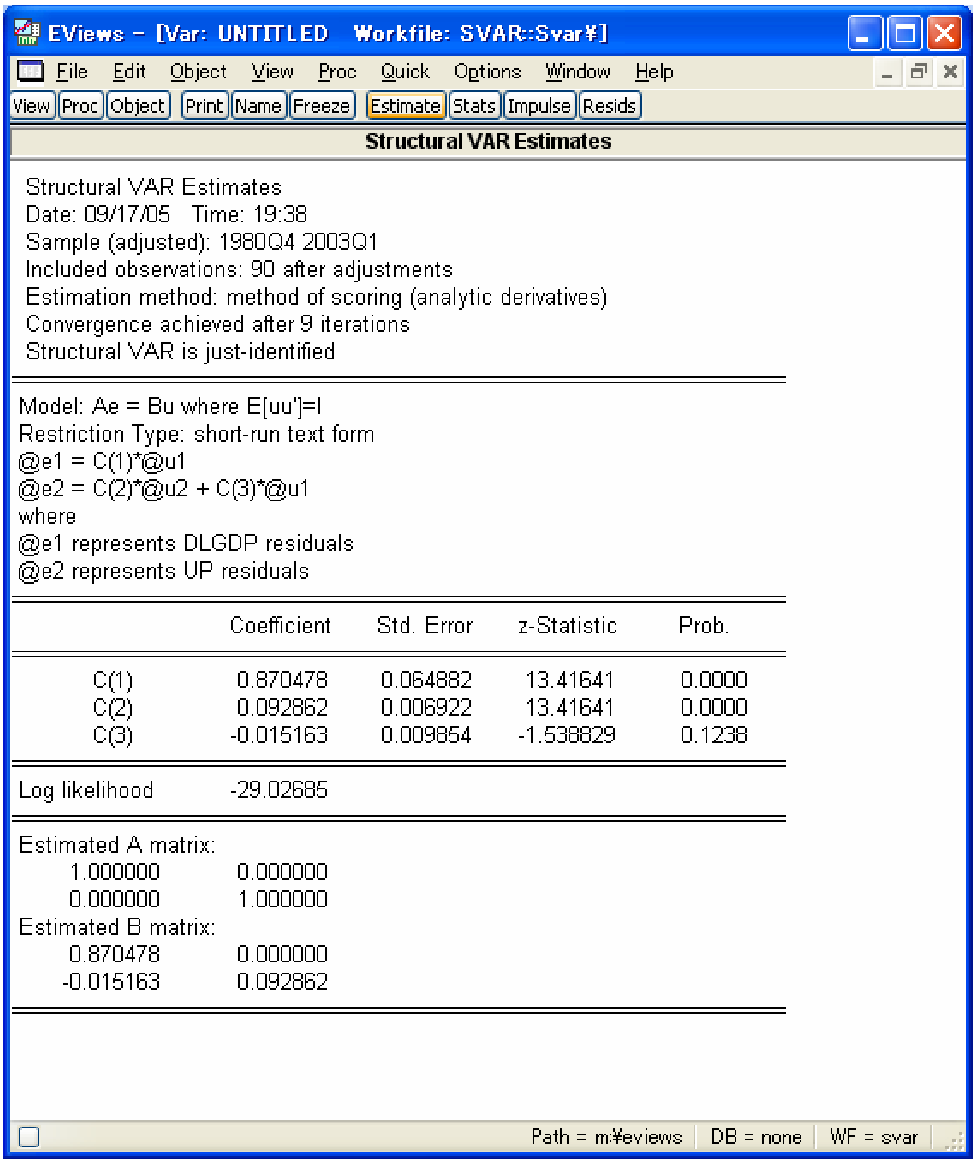


推計によって、パラメーターが３つ推計される。これは次の式を推計したことである。

@e1=0.870478*@u1

@e2=-0.092862@u2+-0.15163*@u1

C(3)が有意ではないが、これは、１本目の構造方程式の誤差 u1 が e2 に与える影響が小さいこと（統計的にはゼロであることを棄却できない）を示している。



Structural VAR Estimates
Date: 09/17/05 Time: 19:38
Sample (adjusted): 1980Q4 2003Q1
Included observations: 90 after adjustments
Estimation method: method of scoring (analytic derivatives)
Convergence achieved after 9 iterations
Structural VAR is just-identified

Model: Ae = Bu where E[uu']=I
Restriction Type: short-run text form
@e1 = C(1)*@u1
@e2 = C(2)*@u2 + C(3)*@u1
where
@e1 represents DLGDP residuals
@e2 represents UP residuals

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.870478	0.064882	13.41641	0.0000
C(2)	0.092862	0.006922	13.41641	0.0000
C(3)	-0.015163	0.009854	-1.538829	0.1238

Log likelihood -29.02685

Estimated A matrix:

1.000000	0.000000
0.000000	1.000000

Estimated B matrix:

0.870478	0.000000
-0.015163	0.092862

長期的な制約を付ける場合

ＶＡＲモデルから推計された残差から、構造形の誤差へと変換ができたとする。ＶＡＲモデルはVMA形式に修正できるので、次のような形に書き表すことができる。

$$y_t = c_{10} + c_{11} u_{yt} + c_{12} u_{yt-1} + c_{13} u_{yt-2} \cdots + d_{11} u_{zt} + d_{12} u_{zt-1} + d_{13} u_{zt-2}$$
$$z_t = c_{20} + c_{21} u_{yt} + c_{22} u_{yt-1} + c_{23} u_{yt-2} \cdots + d_{21} u_{zt} + d_{22} u_{zt-1} + d_{23} u_{zt-2}$$

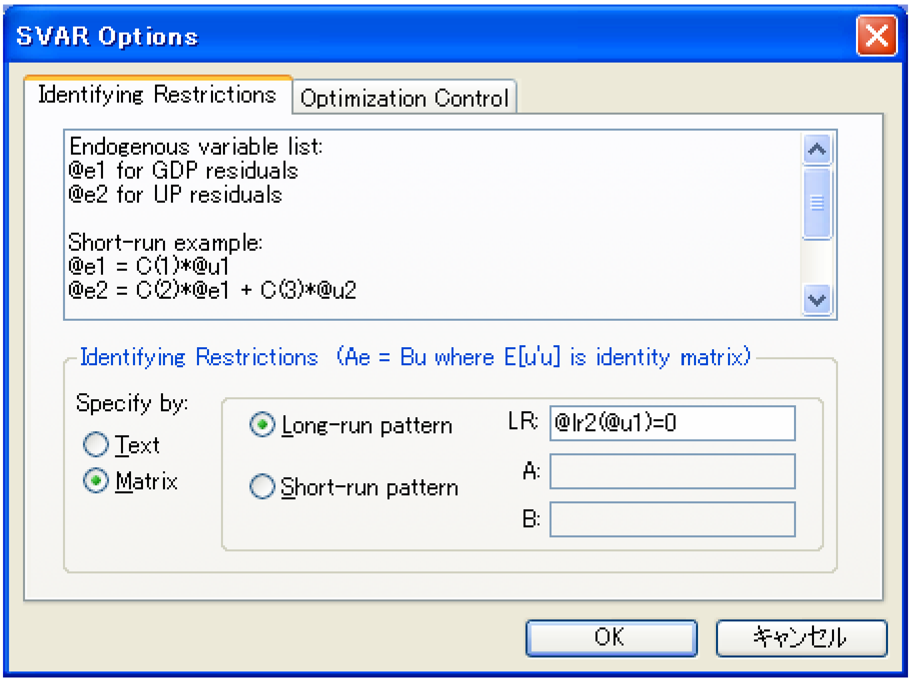
式による制約

TEXT 形式で書くときは 1 番目の構造的誤差が 2 番目の変数に長期的に影響を与えない場合は次の式を入力する。lr とは long run の略である。

ＶＡＲモデルの→[proc][Estinmate Structual Factrization...]

Identifying Restricitions specify by で Text を選び、次の式を入力する。

@lr2(@u1)=0



行列による制約

Ａe=Bu

　のとき、行列ＡとＢを使って、構造形の誤差のそれぞれの係数の和を表している次のような行列Ｃを考える。

$$C=(I-\hat{A}_1-\cdots-\hat{A}_p)^{-1}A^{-1}B$$

$$=\begin{pmatrix} c_{10}+c_{11}+c_{12}+\cdots & d_{11}+d_{12}+d_{12}+\cdots \\ c_{20}+c_{21}+c_{22}+\cdots & d_{21}+d_{22}+d_{23}+\cdots \end{pmatrix}$$

　１番目の構造的な誤差が２番目の変数に長期的に影響を与えない場合は、次の行列の２行１列目をゼロと置く。

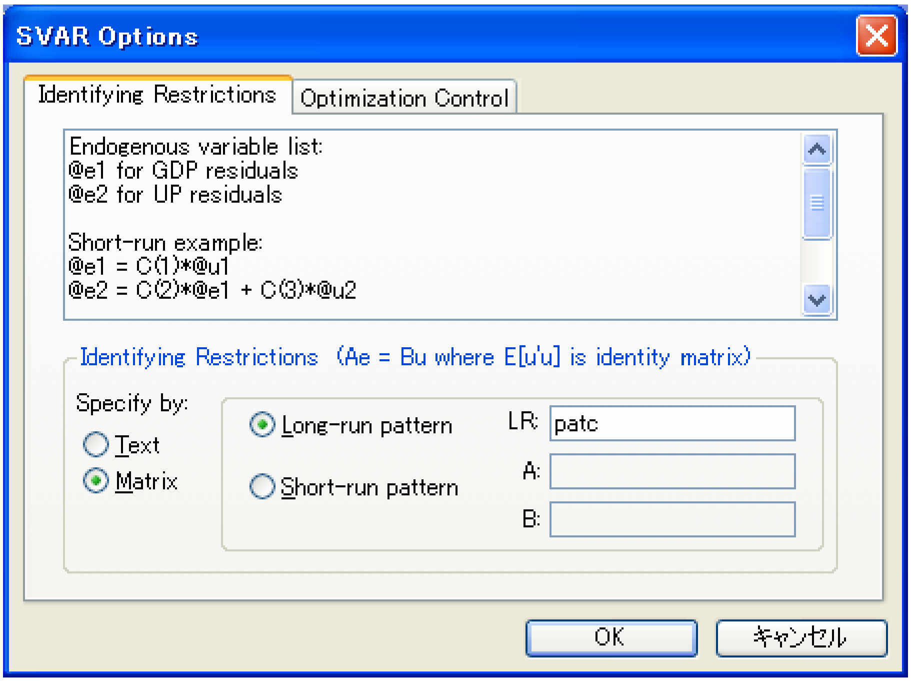
$$C=\begin{pmatrix} na & na \\ 0 & na \end{pmatrix}$$

 Eviews 操作では、ワークファイルに戻り、次の行列をまずコマンドで作成する。

```
matrix(2,2) patc=na
patc(2,1)=0
```

　次に、制約を課す。

　ＶＡＲモデルの→[proc][Estinmate Structual Factrization...]
Identifying Restricitions specify by で　matrix　を選び、行列名（ここでは patc）を入力する。

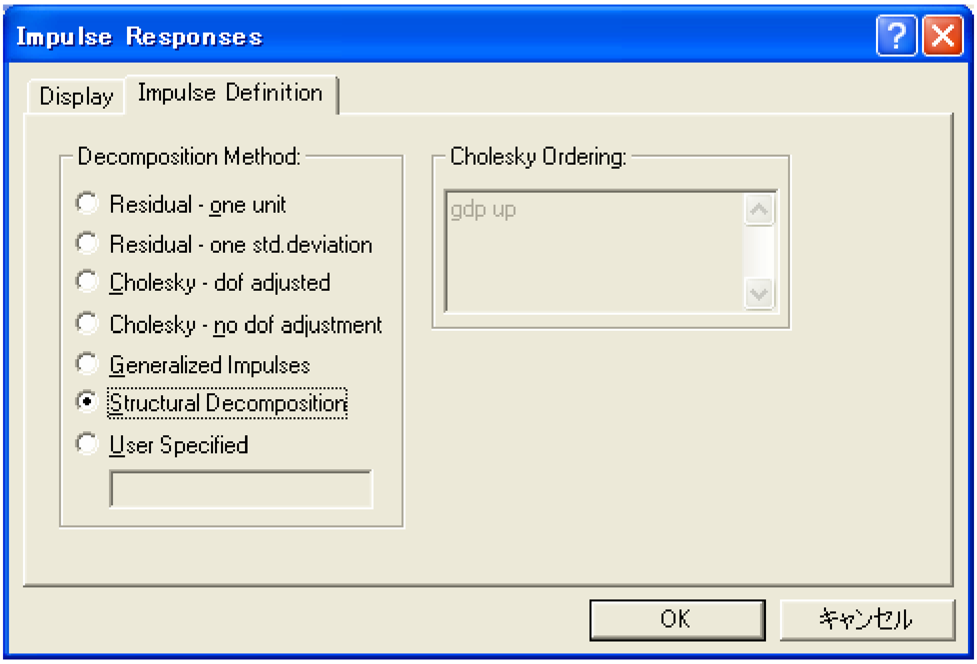

SVAR Options
Identifying Restrictions
Optimization Control
Endogenous variable list:
@e1 for GDP residuals
@e2 for UP residuals
Short-run example:
@e1 = C(1)*@u1
@e2 = C(2)*@e1 + C(3)*@u2
Identifying Restrictions (Ae = Bu where E[u'u] is identity matrix)
Specify by:
Text
Matrix
Long-run pattern
Short-run pattern
LR:
patc
A:
B:
OK
キャンセル

イ ン パ ル ス レ ス ポ ン ス 関 数

構造方程式のインパルスレスポンス関数をみる場合は、通常の VAR モデルの場合と同じである。誘導形から構造形を導こうとしているものだから、ＶＡＲモデルの推計値自体は変わらない。ただし、e と u の関係が変化することによって、インパルスレスポンス関数の形は変わることになる。

var モデルオブジェクトの[impuls]→[Impulse Definition]→[Structural Decomposition]

そのほかの設定は、ＶＡＲモデルの場合と同様だ。



ベクトルエラーコレクションモデル

ヨハンセンの共和分検定

ベクトルエラーコレクションモデルは、次の式で表される。系列に階差をとった系列がＶＡＲモデルの形をしており、さらに、水準の関係式が加わる。

$$\begin{pmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{t-1} \\ \Delta y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{xt} \\ e_{yt} \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

行列πのランクを調べることで、共和分ベクトルの個数を調べる。πがゼロ行列のときが通常のＶＡＲモデルとなる。行列としてのπの性質を調べることで、エラーコレクション項としての共和分の個数が決まる。

πがある行列αとそれと同じ行列数のβの転置行列の積として表されるとき、共和分の関係がある。これは次のように分解できることで理解できるだろう。

たとえば、

$$\pi \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \alpha\beta \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-1} \\ \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(\beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-1}) \\ \alpha(\beta_1 x_{t-1} + \beta_2 y_{t-1}) \end{pmatrix}$$

πがどのようなαとβに分解されるかで、共和分の数が決まる。２変数の場合は共和分の数が 1 個しか考えられないが、3 変数の場合はαが 2 列の行列となって、共和分が２つある場合も考えられる。

行列πの性質と、共和分の数は次のようにまとめられる。

共和分の数⇔πのランク⇔πのゼロでない固有値の数⇔固有値の和＝πのトレース

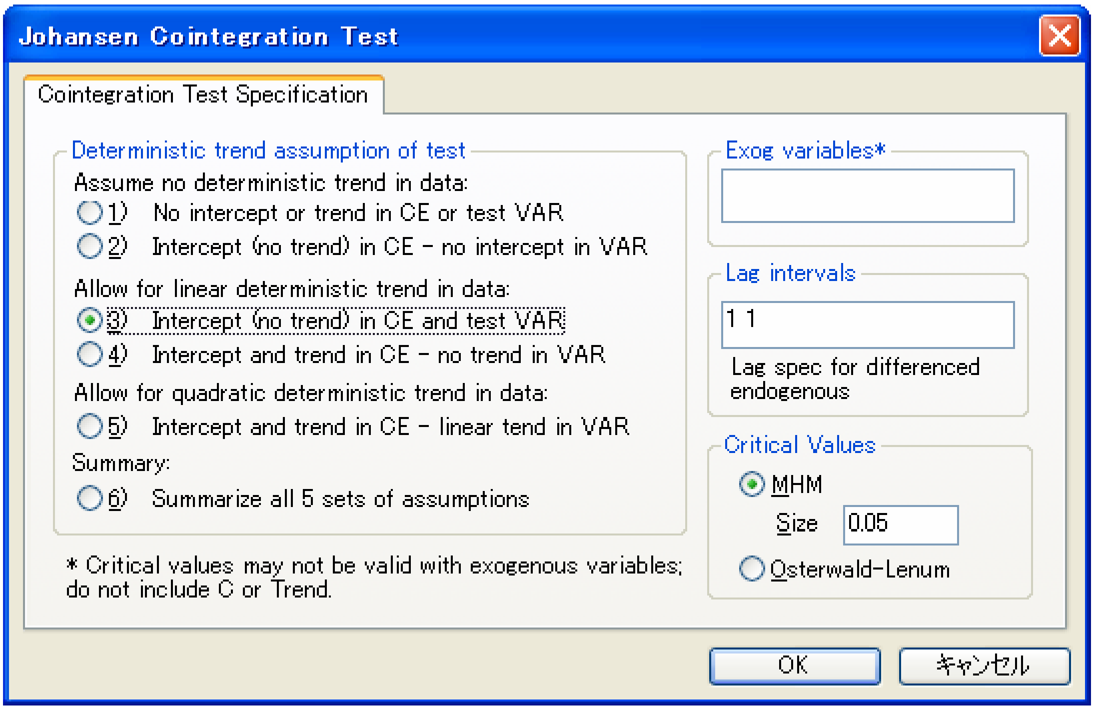
EViews での共和分の調べ方

共和分があるかどうかを調べるには、必要な変数をグループとして開いて共和分検定を行うことができる。しかし、あらかじめ次数がわからない場合にはＶＡＲモデルを作成して次数を調べる必要がある。

ここでは、本編と同じデータを使う。ＧＤＰデフレーター(lpgdp)、中国からの輸入物価

(lmpc)、中国からの輸入数量(lmvc)、マネーサプライ(lm2)、失業率(up)である。失業率以外は対数に変換した。サンプル期間は 1990 年１－３月期から 2003 年 10－12 月期まで。ラグの次数は 1 期で、データ自体にトレンドがあり、共和分ベクトルには定数項がある（EViews のメニューでは 3）のタイプ）と仮定して推計した。

[group]→[View]→[Cointegration Test...]



Deternminicsit trend assumption of test

　ＶＡＲモデルのタイプを決める。タイプは５種類あり、標準的には共和分ベクトルとももとの変数両方にドリフト項（定数項）が付いたものとなっている。すべてのケースについて調べた 6)Summarize all 5 sets of assumptions もあるのでこれを利用すると便利である。

　ＶＡＲモデルのＡＩＣやＳＢＩＣを共和分の数とモデルを変えた場合すべてのケースで出力される。統計的に選ぶにはこの方法がよい。

Exo variables

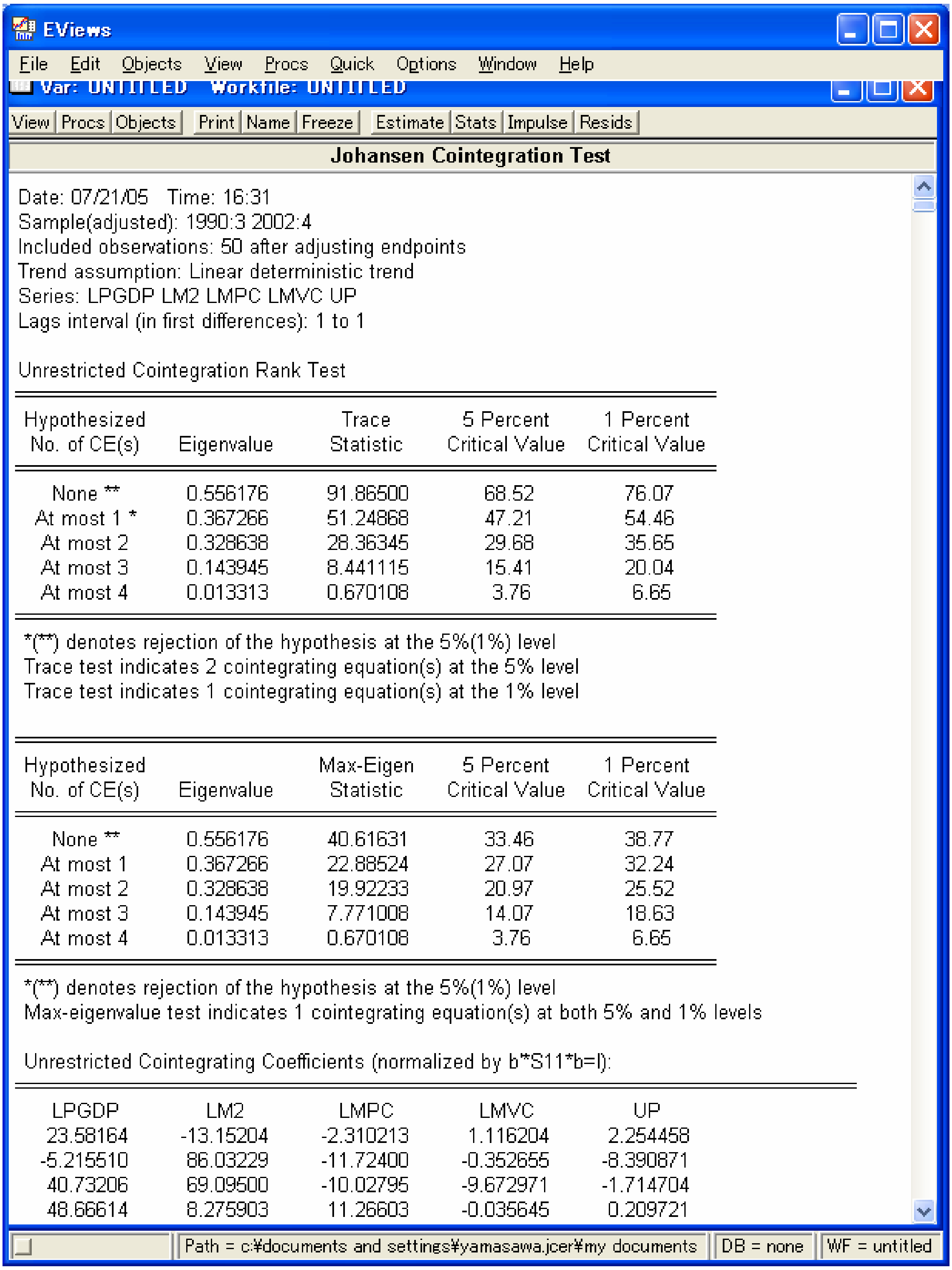
　外生変数があれば入力する。

Lag interevals

　ラグの長さを入力する。

Critical Values

　「共和分の数が n 個である」という帰無仮説を棄却する確率。



Johansen Cointegration Test

Date: 07/21/05 Time: 16:31
Sample(adjusted): 1990:3 2002:4
Included observations: 50 after adjusting endpoints
Trend assumption: Linear deterministic trend
Series: LPGDP LM2 LMPC LMVC UP
Lags interval (in first differences): 1 to 1

Unrestricted Cointegration Rank Test

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	5 Percent Critical Value	1 Percent Critical Value
None **	0.556176	91.86500	68.52	76.07
At most 1 *	0.367266	51.24868	47.21	54.46
At most 2	0.328638	28.36345	29.68	35.65
At most 3	0.143945	8.441115	15.41	20.04
At most 4	0.013313	0.670108	3.76	6.65

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level
Trace test indicates 2 cointegrating equation(s) at the 5% level
Trace test indicates 1 cointegrating equation(s) at the 1% level

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	5 Percent Critical Value	1 Percent Critical Value
None **	0.556176	40.61631	33.46	38.77
At most 1	0.367266	22.88524	27.07	32.24
At most 2	0.328638	19.92233	20.97	25.52
At most 3	0.143945	7.771008	14.07	18.63
At most 4	0.013313	0.670108	3.76	6.65

*(**) denotes rejection of the hypothesis at the 5%(1%) level
Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating equation(s) at both 5% and 1% levels

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'*S11*b=I):

LPGDP	LM2	LMPC	LMVC	UP
23.58164	-13.15204	-2.310213	1.116204	2.254458
-5.215510	86.03229	-11.72400	-0.352655	-8.390871
40.73206	69.09500	-10.02795	-9.672971	-1.714704
48.66614	8.275903	11.26603	-0.035645	0.209721

表の見方

①トレース検定②最大固有値検定③推計された共和分の係数の順に並んでいる。

Hypothesiezed No.of CE(s)(共和分の個数の仮説)

None は共和分がゼロの場合。At most 1 は多くて１の場合。

Eigenvalue（固有値）

推計された固有値。

Trace Statistic（トレース統計量）：トレース検定の場合

たとえば、At most 1 の場合は、もっとも大きな固有値である 0.556176 を除いたトレースがゼロかどうかを検定する。仮説「固有値が多くて１」が正しければ、ゼロになるはずで、仮説が間違っていればゼロより大きくなる。

Max-Eigen Statistic（最大固有値等計量）：最大固有値検定の場合

たとえば、At most 1 の場合は、もっとも大きな固有値である 0.556176 の次に大きい固有値がゼロかどうかを検定する。

5Percent Critical Value（５％水準で棄却するための臨界値）

1Percent Critical Value（１％水準で棄却するための臨界値）

統計量がこの値より大きければ、仮説が棄却できる。「固有値が多くて１」という仮説のとき、トレース検定量は 51.24868 であるのに対し、５％臨界値は 47.21 で１％臨界値は 54.46 である。５％水準では仮説が棄却され、固有値が２以上の可能性があることを意味する。１％水準では仮説が受容され、固有値の数が多くても１となる。

共和分の推計

ＶＥＣは次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix}\Delta x_t\\ \Delta y_t\\ \vdots\end{pmatrix}=C1\begin{pmatrix}\Delta x_{t-1}\\ \Delta y_{t-1}\\ \vdots\end{pmatrix}+C2\begin{pmatrix}\Delta x_{t-1}\\ \Delta y_{t-1}\\ \vdots\end{pmatrix}+\cdots\begin{pmatrix}\alpha_{11}(\beta_{11}x_{t-1}+\beta_{12}y_{t-1}+\cdots)\\ \alpha_{12}(\beta_{11}x_{t-1}+\beta_{12}y_{t-1}+\cdots)\\ \vdots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_{21}(\beta_{21}x_{t-1}+\beta_{22}y_{t-1}+\cdots)\\ \alpha_{22}(\beta_{21}x_{t-1}+\beta_{22}y_{t-1}+\cdots)\\ \vdots\end{pmatrix}+\cdots\begin{pmatrix}e_{xt}\\ e_{yt}\\ \vdots\end{pmatrix}$$

Eviews では検定等計量の後に、共和分ベクトルの推計値が載っている。

βの表は、一行ごとが、共和分の係数になっている。αの表は、一行ごとが各推計式の係数で、共和分ごとに係数が並んでいる。

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'*S11*b=
共和分の係数（β）

	LM2	LMPC	LMVC	LPGDP	UP
共和分1	-13.2	-2.3	1.1	23.6	2.3
共和分2	86.0	-11.7	-0.4	-5.2	-8.4
共和分3	69.1	-10.0	-9.7	40.7	-1.7
共和分4	-8.3	-11.3	0.0	-48.7	-0.2
共和分5	22.3	0.6	0.3	-40.7	-2.1

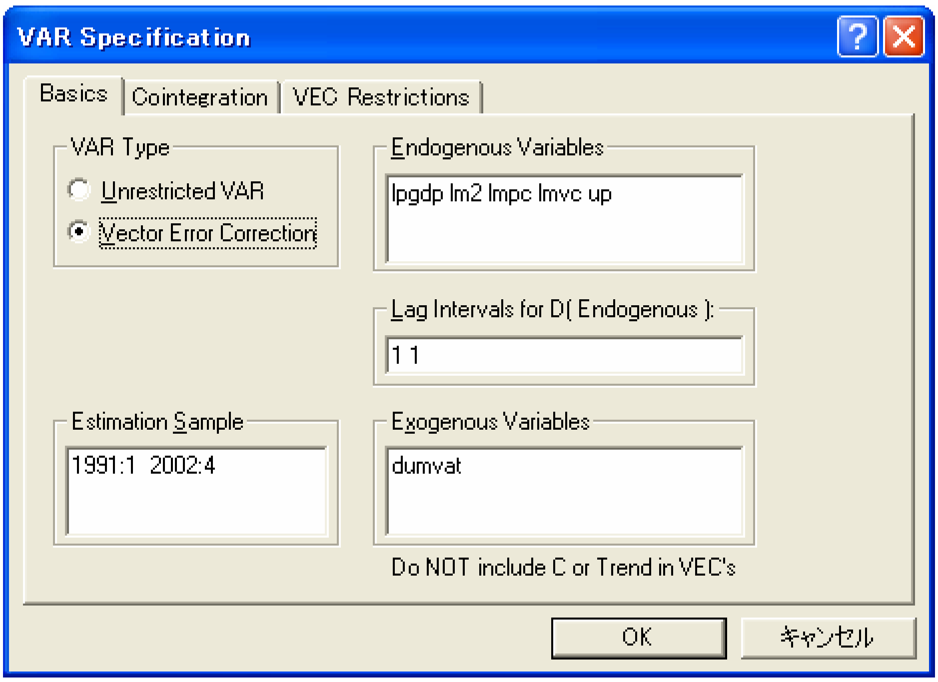
Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha):
αの係数

	共和分1	共和分2	共和分3	共和分4	共和分5
D(LM2)	0.000	-0.001	-0.001	0.000	0.000
D(LMPC)	0.007	0.014	-0.019	0.011	0.000
D(LMVC)	-0.024	-0.018	0.043	0.007	-0.007
D(LPGDP)	-0.002	0.000	-0.001	0.000	0.000
D(UP)	0.014	0.046	0.006	-0.018	-0.003

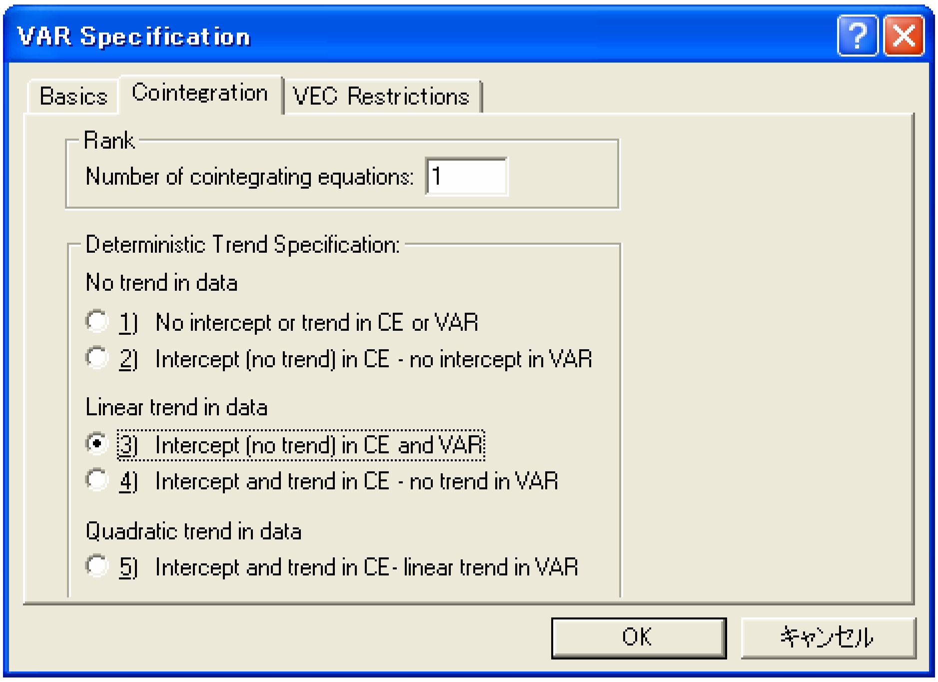
変数が 5 個の場合、共和分関係にある式が 5 個あることはないので、共和分が 4 個以下になるはずだ。それ以下は、共和分が１から４までの場合の係数が表示されている。

ベクトル・エラーコレクションモデルの推計

ベクトルエラーコレクションモデルは通常のＶＡＲモデルと同様の手順でＶＡＲモデルのメニューを開き、VAR Type で「Vector Error Correction」を選ぶ。



Cointegration（共和分）のタグをクリックすると、共和分の個数と、データ系列と共和分系列のタイプが選択できる。



1)から 5)までは式で表せば次のようになる。

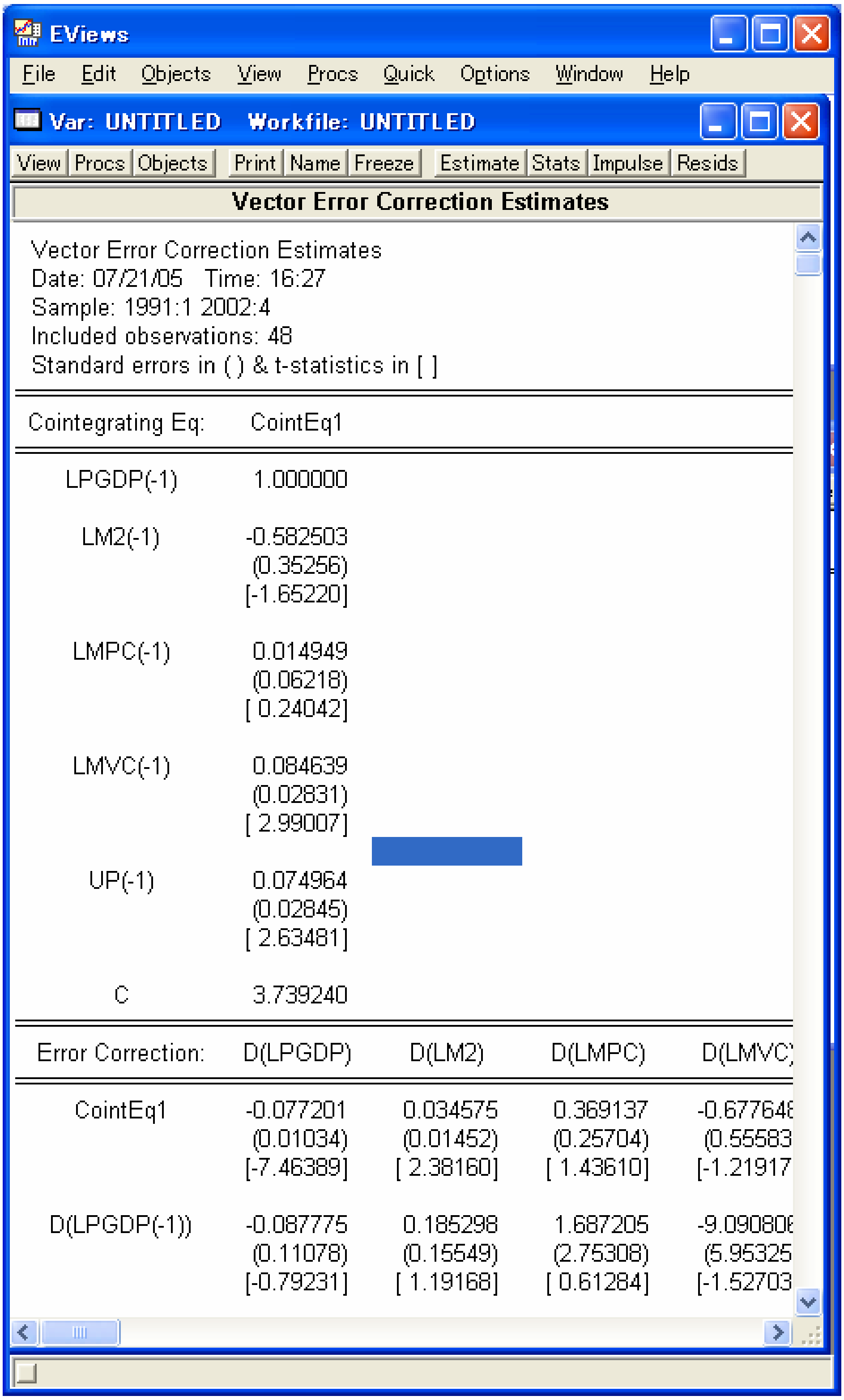
1)$\Delta y_t = m\Delta y_{t-1} + n\Delta x_{t-1} + \gamma(ax_{t-1} + by_{t-1}) + e_t$

2)$\Delta y_t = m\Delta y_{t-1} + n\Delta x_{t-1} + \gamma(c + ax_{t-1} + by_{t-1}) + e_t$

3)$\Delta y_t = m\Delta y_{t-1} + n\Delta x_{t-1} + k + \gamma(c + ax_{t-1} + by_{t-1}) + e_t$

4)$\Delta y_t = m\Delta y_{t-1} + n\Delta x_{t-1} + k + \gamma(c + ax_{t-1} + by_{t-1} + dt) + e_t$

5)$\Delta y_t = m\Delta y_{t-1} + n\Delta x_{t-1} + \beta t + \gamma(c + ax_{t-1} + by_{t-1} + dt) + e_t$



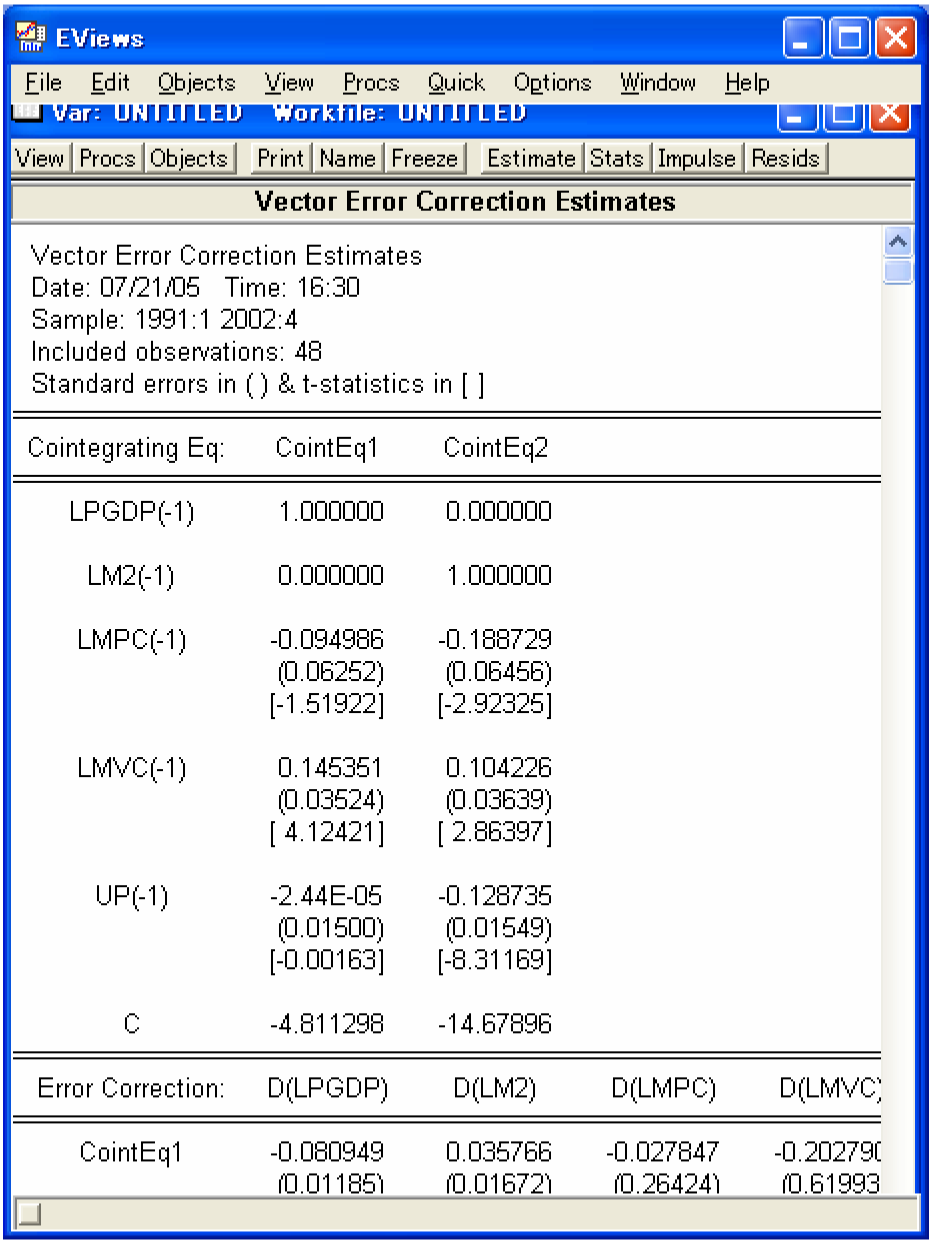
Vector Error Correction Estimates
Date: 07/21/05 Time: 16:27
Sample: 1991:1 2002:4
Included observations: 48
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

Cointegrating Eq:	CointEq1
LPGDP(-1)	1.000000
LM2(-1)	-0.582503 (0.35256) [-1.65220]
LMPC(-1)	0.014949 (0.06218) [0.24042]
LMVC(-1)	0.084639 (0.02831) [2.99007]
UP(-1)	0.074964 (0.02845) [2.63481]
C	3.739240

Error Correction:	D(LPGDP)	D(LM2)	D(LMPC)	D(LMVC)
CointEq1	-0.077201 (0.01034) [-7.46389]	0.034575 (0.01452) [2.38160]	0.369137 (0.25704) [1.43610]	-0.67764 (0.55583 [-1.21917
D(LPGDP(-1))	-0.087775 (0.11078) [-0.79231]	0.185298 (0.15549) [1.19168]	1.687205 (2.75308) [0.61284]	-9.09080 (5.95325 [-1.52703

共和分ベクトルが２つある場合の解釈のしかた

共和分ベクトルが２つ以上あるばあいは、最初にある変数に基準化された（係数が１として）形で出力される。



Vector Error Correction Estimates
Date: 07/21/05 Time: 16:30
Sample: 1991:1 2002:4
Included observations: 48
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

Cointegrating Eq:	CointEq1	CointEq2		
LPGDP(-1)	1.000000	0.000000		
LM2(-1)	0.000000	1.000000		
LMPC(-1)	-0.094986	-0.188729		
	(0.06252)	(0.06456)		
	[-1.51922]	[-2.92325]		
LMVC(-1)	0.145351	0.104226		
	(0.03524)	(0.03639)		
	[4.12421]	[2.86397]		
UP(-1)	-2.44E-05	-0.128735		
	(0.01500)	(0.01549)		
	[-0.00163]	[-8.31169]		
C	-4.811298	-14.67896		
Error Correction:	D(LPGDP)	D(LM2)	D(LMPC)	D(LMVC)
CointEq1	-0.080949	0.035766	-0.027847	-0.20279
	(0.01185)	(0.01672)	(0.26424)	(0.61993

共和分ベクトルは本来次のような形をしている。長期的な均衡状態では、この 2 式が成り立つ。

$$b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$
$$b_4 x + b_5 y + b_6 z = 0$$

しかし、均衡状態の表現法はこれだけとは限らない。どちらか一方の式から上の式からｚを消去することも可能である。

そこで、EViews では、ある変数の係数を１に基準化した長期的な関係をとし、ほかの式ではその変数を使わない形で均衡状態を表している。

たとえば、x,y,z の 3 変数を使って、共和分が 2 個ある場合、x の係数を１とした変数と、ｙの係数を 1 とした式に変形し、ｘがある式からはｙを、ｙのある式からはｘを消去する。

具体的な数値を使えば、次のような変形を行っているが、意味は同じである。

$$\Delta x_t = \Delta x_{t-1} + \Delta y_{t-1} + \Delta z_{t-1} - Ec_{1_{t-1}} - Ec_{2_{t-1}} + e_t$$
$$Ec_{1_t} = 2x_t - 6y_t - 6z_t$$
$$Ec_{2_t} = x_t + 7y_t - 3z_t$$

$$\Delta x_t = \Delta x_{t-1} + \Delta y_{t-1} + \Delta z_{t-1} - 3Ec_{1_{t-1}} - Ec_{2_{t-1}} + e_t$$
$$Ec_{1_t} = x_t - 2z_t$$
$$Ec_{2_t} = y_t - 3z_t$$

インパルス反応関数

インパルス反応関数は通常のＶＡＲモデルと同様に計算されるが、信頼区間は計算されない。