第６章　最小二乗法がすべてではない

最尤法

　最尤法は、誤差の分布が最も想定されたものに近くなるように係数を推計する方法である。誤差の分布には通常正規分布を想定する。どれだけ正規分布に近いかの尺度には尤度を使い、尤度を最大化した時の係数を推計値とする。尤度を最大化するのは計算が煩雑になるので、対数尤度を最大化する。

　尤度関数が簡単な場合は一階の条件を用いることで計算式を用いて尤度の最大値を求めることができる。これを、「最大尤度を解析的に求める」と呼ぶ。線形の方程式の場合は、最大値が解析的に求めることができる。

　尤度関数が複雑になった場合は、解析的に求めることができない。この場合は、さまざまな数値を繰り返し尤度関数に入れることで、最大値を見つけ出す方法がとられる。この場合を「最大尤度を数値的に求める」と呼ぶ。ＥViewsでは数値的に最大値を求めるのが基本となっている。

　「誤差の分布が正規分布に最も近くなるように」係数を選ぶ場合は次のような手順を踏む。ある推計したい式の誤差がxで表されるとする。xが平均ゼロ、標準偏差σの正規分布に従うとすると、尤度は次の式で表される。

$$L = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

　この対数（対数尤度）をとると、次の式になる。

$$\log(L) = \log(2\pi^{-\frac{1}{2}}) + \log(\sigma^{-1}) - \frac{x^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

 サンプル全体の尤度は、各期の尤度を掛け合わせたものであり、対数尤度で表した場合は、各期の尤度を足し合わせたものである。つまり、次式が最大化すべき対数尤度である。最初の等号の右辺の第1項と第3項は標準正規分布関数を表しており、φを標準正規分布関数で表している。

$$l = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{T}{2}\log(\sigma^2) - \sum_{t-1}^{T}\frac{x^2}{2\sigma^2} = \sum_{t-1}^{T}\left(\log\phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\log(\sigma^2)\right)$$

ＥＶiewsの操作法

　最尤法は、各期の尤度の和を最大にするものであるが、Ｅviewsでは各期の対数尤度を計算式で表せば、尤度の和を最大化した場合の係数が推計される。
　次の式を推計することを考えよう。

Cp95=a+b×gdp95+e

この場合、a=c(1),b=c(2)とすると誤差は次式で表され、誤差の標準偏差をσ=c(3)と置く。

res=cp95-c(1)-c(2)*gdp95
se=c(3)

各期の対数尤度は次式である。

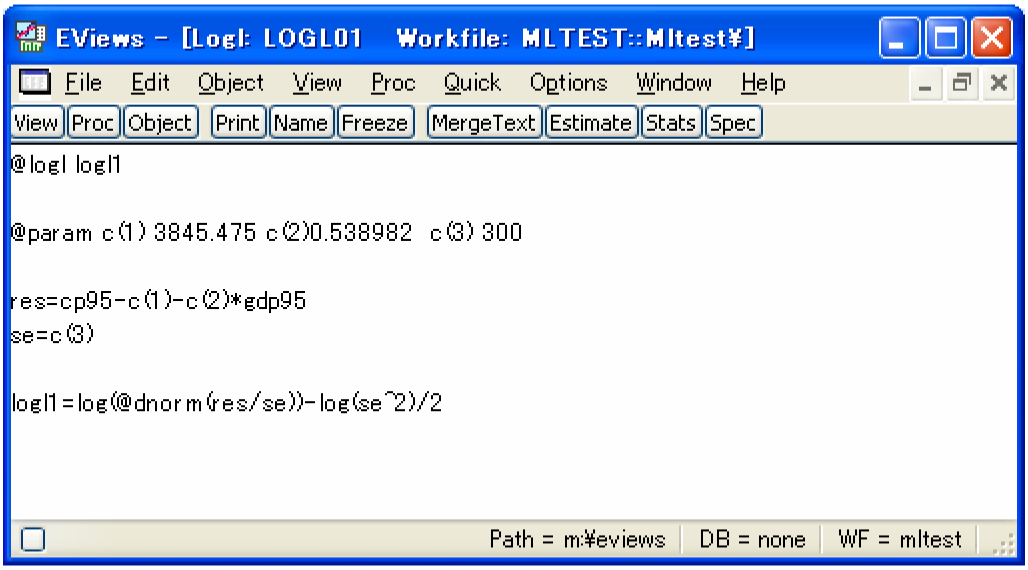
logl1=log(@dnorm(res/se))-log(se^2)/2

　尤度を計算する際に最初に入力する係数（初期値）はEviewsが自動的に設定するので、書き込まなくてもよいが、あらかじめ近いパラメータがわかっている場合はそれを初期値として設定したほうがよい。
　あらかじめ最小二乗法で計算し、その値が、3845.475、0.538952、3530.994である場合は、次の一行を加える。

@param c(1) 3845.475 c(2)0.538982　c(3) 3530.994

　これらをloglというオブジェクトに書き込めば、最尤法で行った係数が計算される。Logl オブジェクトを開くには次の操作をする。

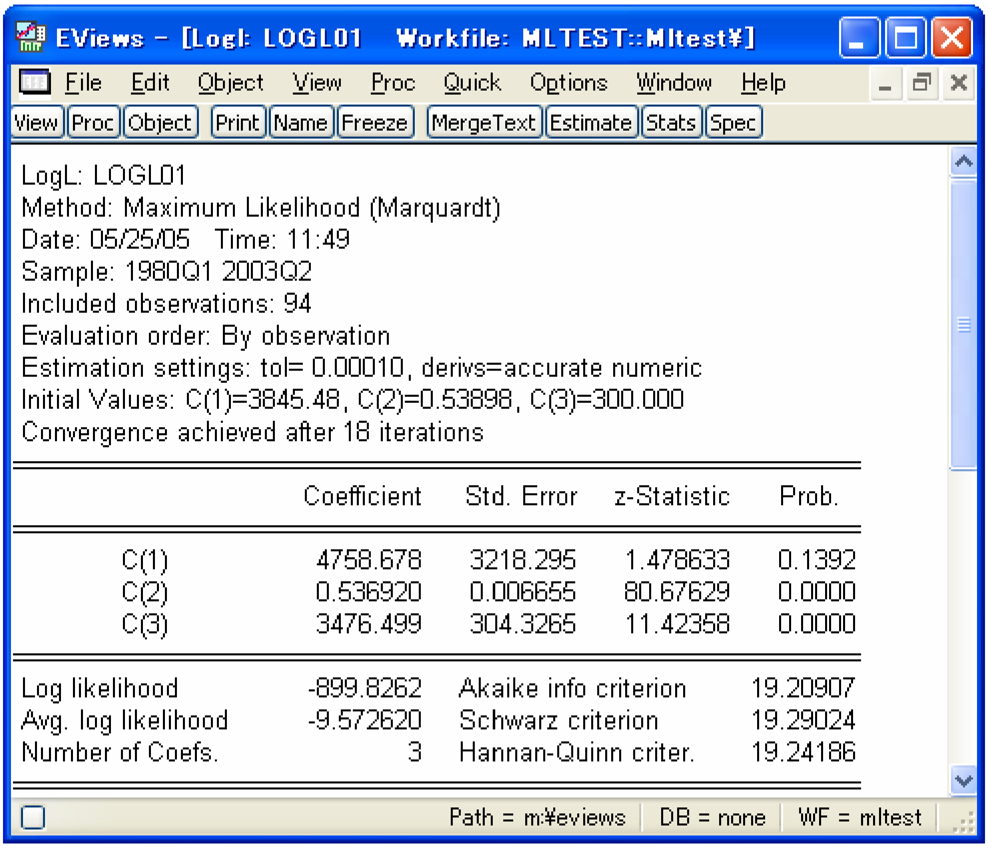
[objct]→[new object]→[LogL]



開かれた画面に式を入力していく。

@logl logl1 ←対数尤度の定義
@param c(1) 4768 c(2) 0.536899 c(3) 3513 ←初期値の設定
res=cp95-c(1)-c(2)*gdp95 ←誤差の計算式。定数項をc(1)、gdp95に係る係数をc(2)とする。
se=c(3) ←標準偏差をc(3)とする。
logl1=log(@dnorm(res/se))-log(se^2)/2 ←対数尤度の具体的な式。

[Estimate]をクリックすると、計算結果が出力される。



最大値の求め方

対数尤度の最大値は、係数についての１階の偏微分（gradient)、２階の偏微分(Hessian)を使うことによって求める。最適化アルゴリズムは、ＢＨＨＨと Marquardt と２種類がある。

BHHH は、数値的に１階の偏微分を行い、2 階の導関数を推測する。

Marquardt は、ＢＨＨＨを基本に、最適値に近づきやすく修正する効果がある。

GMM

GMM とは、一般化モーメント法のことで、モーメント条件を使って、係数を推計するものだ。たとえば、消費関数を推計してみよう。通常使われるのは、操作変数と誤差項の間に相関がないという関係である。

最小二乗法の仮定の一つに、「説明変数と誤差項に相関がない」がある。これを使ってＧＭＭで推計することができる。

Dependent Variable: CP95
Method: Generalized Method of Moments
Date: 02/28/06 Time: 13:47
Sample: 1980 2001
Included observations: 22
Kernel: Bartlett, Bandwidth: Fixed (2), No prewhitening
Simultaneous weighting matrix & coefficient iteration
Convergence achieved after: 1 weight matrix, 2 total coef iterations
Instrument list: GDP95

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4859.149	2955.278	1.644227	0.1158
GDP95	0.536309	0.007480	71.70328	0.0000

R-squared	0.993319	Mean dependent var	242285.9
Adjusted R-squared	0.992985	S.D. dependent var	42085.32
S.E. of regression	3524.916	Sum squared resid	2.49E+08
Durbin-Watson stat	0.959191	J-statistic	1.75E-28

Dependent Variable: CP95
Method: Least Squares
Date: 02/28/06 Time: 13:48
Sample: 1980 2001
Included observations: 22

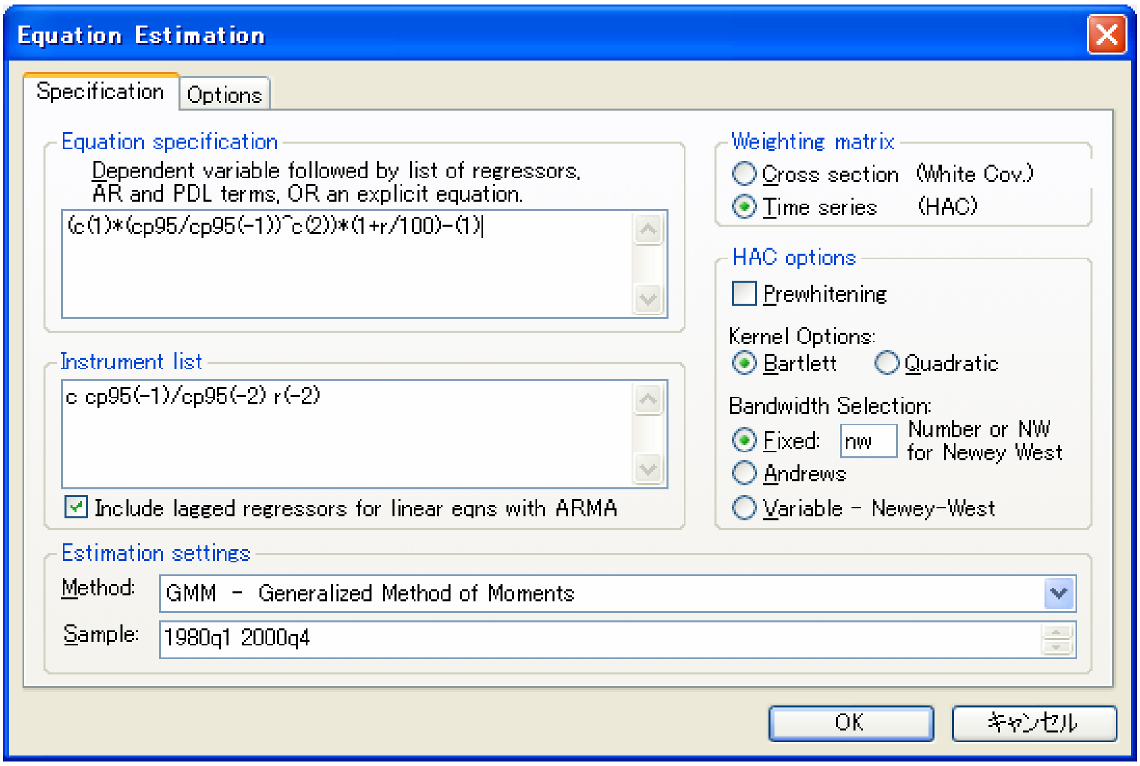
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4859.149	4418.435	1.099745	0.2845
GDP95	0.536309	0.009835	54.53004	0.0000

R-squared	0.993319	Mean dependent var	242285.9
Adjusted R-squared	0.992985	S.D. dependent var	42085.32
S.E. of regression	3524.916	Akaike info criterion	19.25961
Sum squared resid	2.49E+08	Schwarz criterion	19.35879
Log likelihood	-209.8557	F-statistic	2973.525
Durbin-Watson stat	0.959191	Prob(F-statistic)	0.000000

GMMの推計例として、次の式を推計してみよう。

$$\beta(CP95_t / cp95_{t-1})^{-a}(1+R_t/100)-1=e_t$$

操作変数として、定数項と、$CP95_{t-1}/CP95_{t-2},R_{t-2}$ を使った。



非線形推計の場合は、初期値が重要になる。ここでは、β を 1,a も 1 として推計する。

```
param c(1) 1 c(2) 1
gmm (C(1)*(CP95/CP95(-1))^C(2))*(1+R/100)-(1) @ C CP95(-1)/CP95(-2) R(-2)
table out
out(1,1)= @chisq(@jstat*@regobs,1)
```